

О реализации счетных спектров характеристик колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений

Артисевич Анжела Евгеньевна
Сташ Айдамир Хазретович

Адыгейский государственный университет, КМЦ АГУ

V Всероссийская научная конференция
«Осенние математические чтения в Адыгее»
Майкоп, 09–14 октября 2025 г.

Пространство линейных однородных уравнений

$n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}^n$:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty);$$

$$a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$\mathcal{S}_*(a)$ – множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$;

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n = \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Смена знака

Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *смена знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Обозначения

Пусть $t > 0$ и $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

- $\nu^-(y, t)$ — число точек *смены знака* функции y на промежутке $(0, t]$;
- $\nu^0(y, t)$ — число *нулей* функции y на $(0, t]$;
- $\nu^+(y, t)$ — число *корней* (т.е. нулей с учетом их кратностей) функции y на $(0, t]$.

Для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции

$$\psi^n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

введем обозначение $\nu^\alpha(y, m, t) \equiv \nu^\alpha(\langle \psi^n y, m \rangle, t)$, где $\alpha \in \{-, 0, +\}$, $\langle \psi^n y(\cdot), m \rangle$ — скалярное произведение.

Характеристические частоты

Верхние (нижние) характеристические частоты знаков, нулей и корней любого решения $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$ при $\alpha \in \{-, 0, +\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\omega}^{\alpha}(y) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(y, t) \quad \left(\check{\omega}^{\alpha}(y) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(y, t) \right).$$

Пример

Для скалярной функции $y = \sin \gamma t$ при любом $\alpha = -, 0, +$ найдем

$$\check{\omega}^{\alpha}(y) = \hat{\omega}^{\alpha}(y) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \left[\frac{\gamma t}{\pi} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \left(\frac{\gamma t}{\pi} - \left\{ \frac{\gamma t}{\pi} \right\} \right) = \gamma.$$

Связь характеристических частот с колеблемостью

Пусть y — нетривиальное решение некоторого уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Если $\check{\omega}(y) > 0$, то функция y — колеблющаяся.

Контрпример

Из колеблемости y не следует $\check{\omega}(y) > 0$. Например, для решения $y = \sin(\ln(t+1))$.

Показатели колеблемости

Верхний и нижний сильные показатели колеблемости знаков, нулей и корней функции $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$ при $\alpha \in \{-, 0, +\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_{*}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(y, m, t),$$

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_{*}^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(y, m, t).$$

Замечание

Для любых функции $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$ и $\alpha \in \{-, 0, +\}$ справедливы соотношения

$$\nu^-(y, t) \leq \nu^0(y, t) \leq \nu^+(y, t), \quad t > 0,$$

$$\hat{\omega}^-(y) \leq \hat{\omega}^0(y) \leq \hat{\omega}^+(y), \quad \check{\omega}^-(y) \leq \check{\omega}^0(y) \leq \check{\omega}^+(y),$$

$$\hat{\nu}_{\bullet}^-(y) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^0(y) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^+(y), \quad \check{\nu}_{\bullet}^-(y) \leq \check{\nu}_{\bullet}^0(y) \leq \check{\nu}_{\bullet}^+(y),$$

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) \leq \hat{\omega}^{\alpha}(y), \quad \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) \leq \check{\omega}^{\alpha}(y).$$

Спектр показателя системы

Спектром показателя $\varkappa$ уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ назовем множество

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(a)) \equiv \{\varkappa(y) \mid y \in \mathcal{S}_*(a)\}.$$

И.Н.Сергеев, 2006

Все верхние (как и все нижние) характеристики колеблемости на множестве решений уравнений второго порядка равны между собой и их спектры состоят из одного значения.

А.Ю. Горицкий, 2008

Существует уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, спектр характеристических частот нулей которого представляет собой целый отрезок числовой прямой.

М.В.Смоленцев, 2012

Существует периодическое уравнение третьего порядка с континуальным спектром характеристических частот нулей.

А.Х.Сташ, 2012

Существует уравнение третьего порядка с континуальными спектрами характеристических частот и показателей колеблемости.

А.С. Войделевич, 2015

Существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, для которого выполняются равенства

$$\hat{\omega}^-(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^0(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^+(\mathcal{S}_*(a)) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

А.Е. Артисевич, А.Х. Сташ, 2023

Существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, для которого выполняются равенства

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad \alpha \in \{-, 0, +\}.$$

Теорема

Для любых $n > 2$ и не более чем счетного множества S неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует такое уравнение $a \in \mathcal{E}^n$, что при любом $\alpha \in \{-, 0, +\}$ справедливы равенства

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\omega}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = S,$$

причем

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) = \check{\omega}^{\alpha}(y) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) = \hat{\omega}^{\alpha}(y), \quad y \in \mathcal{S}_*(a),$$

Следствие

При любом $n > 2$ существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^n$, для которого при любом $\alpha \in \{-, 0, +\}$ выполнено

$$\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\omega}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

В данной работе продемонстрирована возможность реализации не более чем счетных спектров характеристических частот и сильных показателей колеблемости линейного однородного дифференциального уравнения порядка выше второго.

- ▶ Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения// Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
- ▶ Сташ А.Х. О бесконечных спектрах показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Изв. вуз. Матем. 2024. № 4. С. 47–66.
- ▶ Смоленцев М.В. Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок// Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1413–1417.
- ▶ Войделевич А.С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений//Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2015. № 3. 17–23.

- ▶ Сташ А.Х. О существенных значениях частот Сергеева и показателей колеблемости решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33, № 1. С. 141–155.
- ▶ Сергеев И. Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.
- ▶ Сташ А.Х., Артисевич А.Е. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2023. № 5. С. 16–22.

Спасибо за внимание!