

Ляпуновские характеристики параметрических семейств линейных дифференциальных систем

Быков Владимир Владиславович

МГУ имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра дифференциальных уравнений

Осенние математические чтения в Адыгее

10 октября 2025 года

Показатель Ляпунова линейного уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывной функцией $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Его решения суть функции

$$x(t) = C \exp \left(\int_0^t a(\tau) d\tau \right), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Характеристическим показателем (Ляпунова) функции $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ называется (конечная или бесконечная) величина

$$\lambda[x] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|.$$

Все ненулевые решения уравнения a имеют одинаковый показатель

$$\lambda(a) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(\tau) d\tau.$$

Параметрическое семейство уравнений

Пусть M – метрическое пространство. Рассмотрим семейство линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = a(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с непрерывной функцией $a: \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}$.

Вопрос: что представляет собой функция

$$\lambda(\mu; a) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(\tau, \mu) d\tau?$$

Например, можно ли построить семейство уравнений, для которого эта функция совпадает с

- функцией Дирихле? (функция Дирихле – характеристическая функция множества $\mathbb{Q}$)
- функцией Римана? (равной $1/n$ в рациональной точке m/n , $(m, n) = 1$, и 0 в иррациональных точках)
- ...?

Пример: разрывная зависимость от параметра

Рассмотрим семейство уравнений с коэффициентом

$$a(t, \mu) = 2 \sin^2(\pi t) \cos^2(\pi 3^k \mu / 2), \quad t \in [k-1, k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in [0, 1].$$

$$\Omega_1 = \{\mu \in [0, 1] : \mu = m3^{-j}, j \in \mathbb{N}, m \in 2\mathbb{N} + 1\},$$

$$\Omega_2 = \{\mu \in [0, 1] : \mu = m3^{-j}, j \in \mathbb{N}, m \in 2\mathbb{N}\}.$$

$$\mu \in \Omega_1 \Rightarrow \lambda(\mu; a) = 0; \quad \mu \in \Omega_2 \Rightarrow \lambda(\mu; a) = 1.$$

Т.к. $\overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_2 = [0, 1]$, то функция $\mu \mapsto \lambda(\mu; a)$ **всюду разрывна**.

Классификация функций

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое множество функций $M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

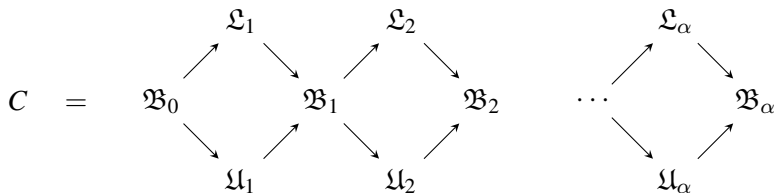
$$\begin{array}{ll} [\mathcal{F}] & f(\mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mu) \\ [\mathcal{F}]^\uparrow & \text{– функции } M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \text{ представимые в виде } f(\mu) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mu) \\ [\mathcal{F}]^\downarrow & f(\mu) = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(\mu), \end{array}$$

где $\mu \in M, f_k \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}$.

Классы Бэра: $\mathfrak{B}_0(M) = C(M), \mathfrak{B}_k(M) = [\mathfrak{B}_{k-1}(M)], k \in \mathbb{N}$.

Классы Янга–Хаусдорфа: $\mathfrak{L}_0(M) = \mathfrak{U}_0(M) = C(M),$
 $\mathfrak{L}_k(M) = [\mathfrak{U}_{k-1}(M)]^\downarrow, \mathfrak{U}_k(M) = [\mathfrak{L}_{k-1}(M)]^\uparrow, k \in \mathbb{N}.$

Соотношения между классами



Справедливы соотношения: $\mathfrak{B}_{k-1}(M) \subset \mathfrak{B}_k(M)$,

$\mathfrak{L}_{k-1}(M) \subset \mathfrak{L}_k(M)$, $\mathfrak{U}_{k-1}(M) \subset \mathfrak{U}_k(M)$,

$\mathfrak{B}_k(M) \supset \mathfrak{L}_k(M)$, $\mathfrak{B}_k(M) \supset \mathfrak{U}_k(M)$,

$\mathfrak{B}_{k-1}(M) = \mathfrak{L}_k(M) \cap \mathfrak{U}_k(M)$, $k \in \mathbb{N}$.

$\mathfrak{B}_0(M) = \mathfrak{L}_0(M) = \mathfrak{U}_0(M) = C(M)$ – непрерывные функции,

$\mathfrak{L}_1(M)$ – полунепрерывные сверху функции,

$\mathfrak{U}_1(M)$ – полунепрерывные снизу функции.

Показатель линейного параметрического уравнения

Теорема (М.В. Карпук, 2014)

$$\{\mu \mapsto \lambda(\mu; a) : a \in C(\mathbb{R}_+ \times M)\} = \mathfrak{L}_2(M).$$

А если потребовать, чтобы при каждом $\mu \in M$ уравнение

$$\dot{x} = a(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

имело **ограниченный** коэффициент?

Теорема (М.В. Карпук, 2014)

Класс $\{\mu \mapsto \lambda(\mu; a) : a \in C(\mathbb{R}_+ \times M) \wedge \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |a(t, \mu)| < \infty, \mu \in M\}$

состоит из конечных функций класса $\mathfrak{L}_2(M)$, каждая из которых имеет полунепрерывную сверху миноранту.

Кстати, функция Римана $R \in \mathfrak{B}_1([0, 1]) \subset \mathfrak{L}_2([0, 1])$, а функция Дирихле $D \in \mathfrak{U}_2([0, 1]) \setminus \mathfrak{L}_2([0, 1])$, зато $1 - D \in \mathfrak{L}_2([0, 1])$.

Показатели Ляпунова системы

Обозначим через $S(A)$ пространство решений линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (A)$$

Хорошо известно, что множество $\{\lambda[x] : x \in S_*(A)\}$ содержит не более n элементов (здесь и далее звёздочка в нижнем индексе означает выкалывание нуля).

Показателями Ляпунова системы (A) называются величины

$$\lambda_i(A) = \inf_{L \in G_i(S(A))} \sup_{x \in L_*} \lambda[x], \quad i = \overline{1, n},$$

где $G_i(V)$ – множество i -мерных векторных подпространств пространства V .

Отметим, что $-\infty \leq \lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A) \leq +\infty$.

Параметрические семейства систем

Пусть M – метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M, \quad (*)$$

с непрерывными функциями $A: \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$.

Класс всех таких семейств обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$.

Мы также будем рассматривать семейства $(*)$ из $\mathcal{C}^n(M)$ непрерывные по $\mu \in M$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}_+$, т.е. удовлетворяющие условию

$$\lim_{\nu \rightarrow \mu} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|A(t, \nu) - A(t, \mu)\| = 0, \quad \mu \in M.$$

Класс всех таких семейств обозначим через $\mathcal{U}^n(M)$.

Постановка задачи

Показатели параметрической системы

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M,$$

будем обозначать через $\lambda_1(\mu; A) \leq \dots \leq \lambda_n(\mu; A)$.

Возникает вопрос: что представляют собой классы функций

$$\Lambda_i^C(M; n) \equiv \{\mu \mapsto \lambda_i(\mu; A) : A \in C^n(M)\}$$

и

$$\Lambda_i^U(M; n) \equiv \{\mu \mapsto \lambda_i(\mu; A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$$

для заданных $n \geq 2$, $i = \overline{1, n}$ и метрического пространства M ?

Легко видеть, что $\Lambda_1^U(M; 1) = C(M, \overline{\mathbb{R}})$.

Результаты

Теорема (В.М. Миллионщиков, 1980)

Для любого $n \geq 1$ и $i = \overline{1, n}$ справедливы включения $\Lambda_i^U(M; n) \subset \Lambda_i^C(M; n) \subset \mathfrak{L}_2(M)$.

Теорема (М.И. Рахимбердиев, 1982)

Для любых $n \geq 2$ и $i = \overline{1, n}$ выполнено $\Lambda_i^U([0, 1]; n) \not\subset \mathfrak{B}_1([0, 1])$.

Теорема (М.В. Карпук, 2014)

Для любого $n \geq 1$ и $i = \overline{1, n}$ справедливо равенство $\Lambda_i^C(M; n) = \mathfrak{L}_2(M)$.

Теорема (В.В. Быков, 2020)

Для любого $n \geq 2$ и $i = \overline{1, n}$ справедливо равенство $\Lambda_i^U(M; n) = \mathfrak{L}_2(M)$.

Подпространства α -медленных решений

Зафиксируем $A \in \mathcal{C}^n(M)$, $\mu \in M$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Положим

$$d_\alpha(\mu; A) = \dim\{x \in S(A(\cdot, \mu)) : \lambda[x] < \alpha\},$$

$$D_\alpha(\mu; A) = \dim\{x \in S(A(\cdot, \mu)) : \lambda[x] \leq \alpha\}.$$

Возникает естественный вопрос: что представляют собой классы функций

$$\delta_\alpha^C(M; n) \equiv \{\mu \mapsto d_\alpha(\mu; A) : A \in \mathcal{C}^n\},$$

$$\delta_\alpha^U(M; n) \equiv \{\mu \mapsto d_\alpha(\mu; A) : A \in \mathcal{U}^n\},$$

$$\Delta_\alpha^C(M; n) \equiv \{\mu \mapsto D_\alpha(\mu; A) : A \in \mathcal{C}^n\},$$

$$\Delta_\alpha^U(M; n) \equiv \{\mu \mapsto D_\alpha(\mu; A) : A \in \mathcal{U}^n\}?$$

Теорема (А.Н. Ветохин, 2015)

Справедливы следующие утверждения:

- для любых метрического пространства M , $n \geq 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы включения $\delta_\alpha^C(M; n) \subset \mathfrak{B}_2(M)$, $\Delta_\alpha^C(M; n) \subset \mathfrak{B}_3(M)$;
- для любых $n \geq 2$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы включения $\delta_\alpha^U(\mathbb{I}; n) \not\subset \mathfrak{B}_1(\mathbb{I})$, $\Delta_\alpha^U(\mathbb{I}; n) \not\subset \mathfrak{B}_2(\mathbb{I})$.

Теорема (Е.А. Барабанов, В.В. Быков, М.В. Карпук, 2019)

Для любых чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$ и метрического пространства M классы $\delta_\alpha^C(M; n)$ и $\delta_\alpha^U(M; n)$ совпадают между собой и состоят из функций $M \rightarrow \{0, \dots, n\}$, принадлежащих классу $\mathfrak{U}_2(M)$, а классы $\Delta_\alpha^C(M; n)$ и $\Delta_\alpha^U(M; n)$ также совпадают между собой и состоят из функций $M \rightarrow \{0, \dots, n\}$, принадлежащих классу $\mathfrak{L}_3(M)$.

Пространство ограниченных решений

Для семейства $A \in \mathcal{C}^n(M)$ и $\mu \in M$ определим **индекс устойчивости** равенством $s(\mu; A) = \dim\{x \in S(A(\cdot, \mu)) : \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| < \infty\}$.

Положим

$$\sigma^C(M; n) = \{\mu \mapsto s(\mu; A) : A \in \mathcal{C}^n\}, \quad \sigma^U(M; n) = \{\mu \mapsto s(\mu; A) : A \in \mathcal{U}^n\}.$$

Теорема (М.И. Зайдель, 2023)

Для любого метрического пространства M :

- для всякого $n \geq 1$ справедливы включения $\sigma^C(M; n) \subset \sigma^U(M; n) \subset \mathfrak{U}_2(M)$.
- для всякого $n \geq 2$ справедливы равенства

$$\sigma^C(M; n) = \sigma^U(M; n) = \{f : M \rightarrow \{0, \dots, n\} \wedge f \in \mathfrak{U}_2(M)\}.$$

Более того, любая функция из $\sigma^C(M; n)$ реализуется семейством с тождественно нулевыми показателями Ляпунова.

Характеристические частоты (частоты Сергеева)

Для заданного числа $t > 0$ обозначим через $\nu^{\varkappa}(y, t)$ в зависимости от значения $\varkappa$ количество y функции y на полуинтервале $[0, t)$:

- смен знака, если $\varkappa = -$;
- нулей, если $\varkappa = 0$;
- корней, т.е. нулей с учетом их кратности, если $\varkappa = +$;
- гиперкратных корней, если $\varkappa = *$. В последнем случае простой нуль функции y учитывается один раз, а кратный – бесконечно много раз, независимо от его кратности.

Верхняя (нижняя) частота Сергеева знаков, нулей, корней или гиперкорней скалярной функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – это величина

$$\hat{\nu}^{\varkappa}[y] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\varkappa}(y, t) \quad (\check{\nu}^{\varkappa}[y] = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\varkappa}(y, t)),$$

при $\varkappa = -, 0, +, *$ соответственно.

Классификация частот Сергеева

Рассмотрим параметрическое семейство задач Коши

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t, \mu)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t, \mu)\dot{y} + a_n(t, \mu)y = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ y(0, \mu) = \xi(\mu), & \mu \in M. \end{cases}$$

Функции a_i , $i = \overline{1, n}$, и ξ считаем непрерывными. В этом случае каждому значению параметра $\mu \in M$ отвечает единственное решение задачи Коши $y(\cdot, \mu)$. Таким образом, частоты Сергеева можно рассматривать как функции параметра: $\mu \mapsto \tilde{\nu}^{\varkappa}[y(\cdot, \mu)]$, где $\tilde{\nu} \in \{\sim, \wedge\}$ и $\varkappa \in \{-, 0, +\}$.

Теорема (Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич, В.В. Быков, 2016)

Справедливы следующие утверждения:

- $\tilde{\nu}^-, \tilde{\nu}^0 \in \mathfrak{U}_3(M)$;
- $\hat{\nu}^+, \hat{\nu}^0 \in \mathfrak{L}_3(M)$;
- $\tilde{\nu}^+ \in \mathfrak{U}_2(M)$;
- $\hat{\nu}^- \in \mathfrak{L}_2(M)$.

Спектры частот Сергеева

Пусть задан функционал φ на множестве ненулевых решений уравнений вида

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (\diamond)$$

каждое из которых мы будем отождествлять со строкой его коэффициентов $a \equiv (a_1, \dots, a_n)$. Множество ненулевых решений уравнения a обозначим через $S_*(a)$. Спектром показателя φ на уравнении a называется множество $\{\varphi(x) : x \in S_*(a)\}$.

Из приведённой теоремы следует, что спектры частот Сергеева любого уравнения являются суслинскими множествами.

Более того, справедлива

Теорема (Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич, 2016)

Для произвольного суслинского множества $P \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, существует уравнение $(\diamond)$ третьего порядка, спектры верхних частот Сергеева нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством P .

Наименьшая верхняя частота знаков

Наименьшая верхняя частота знаков семейства уравнений

$$y^{(n)} + a_1(t, \mu)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t, \mu)\dot{y} + a_n(t, \mu)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M,$$

есть величина $\omega_1(\mu; a) = \inf_{y \in \mathcal{S}_*(a(\cdot, \mu))} \hat{\nu}^-[y]$, $\mu \in M$.

Множество семейств уравнений с непрерывными коэффициентами a_i , $i = \overline{1, n}$, обозначим через $\mathcal{F}^n(M)$.

Теорема (И.Н. Сергеев, 2012)

Для любого $n \geq 2$ справедливы утверждения:

- для всякого $a \in \mathcal{F}^n(M)$ справедливо включение $\omega_1(\cdot; a) \in \mathfrak{B}_2(M)$;
- существуют M и $a \in \mathcal{F}^n(M)$ такие, что $\omega_1(\cdot; a) \notin \mathfrak{B}_1(M)$.

Теорема (В.А. Похачевский, В.В. Быков, 2025)

- Для любых $n \geq 2$ и $a \in \mathcal{F}^n(M)$ справедливо включение $\omega_1(\cdot; a) \in \mathfrak{L}_2(M)$.
- Класс функций $\{\omega_1(\cdot; a) : a \in \mathcal{F}^2(M)\}$ совпадает с множеством функций $M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, принадлежащих классу $\mathfrak{L}_2(M)$.

Обобщение частоты на случай вектор-функции

Слабый верхний (нижний) показатель колеблемости знаков, нулей, корней или гиперкорней вектор-функции $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ – это величина

$$\hat{\nu}_{\circ}^{\varkappa}[x] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{a \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\varkappa}(\langle x, a \rangle, t) \quad (\check{\nu}_{\circ}^{\varkappa}[x] = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{a \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\varkappa}(\langle x, a \rangle, t)),$$

при $\varkappa = -, 0, +, *$ соответственно, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, а звездочка в нижнем индексе обозначает выкалывание нуля.

Аналогично, сильный верхний (нижний) показатель колеблемости знаков, нулей, корней или гиперкорней задаются равенствами

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\varkappa}[x] = \inf_{a \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\varkappa}(\langle x, a \rangle, t) \quad (\check{\nu}_{\bullet}^{\varkappa}[x] = \inf_{a \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\varkappa}(\langle x, a \rangle, t)).$$

Классификация показателей колеблемости

Рассмотрим семейство задач Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t, \mu)x, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x(0) = \xi(\mu). \end{cases}$$

Если коэффициенты матрицы A непрерывны, то при каждом $\mu \in M$ задача Коши имеет единственное решение $x(\cdot, \mu)$. Таким образом, показатели колеблемости можно рассматривать как функции параметра: $\mu \mapsto \tilde{\nu}_{\diamond}^{\varkappa}[x(\cdot, \mu)]$, где $\diamond \in \{\circ, \bullet\}$, $\tilde{\cdot} \in \{\sim, \wedge\}$ и $\varkappa \in \{-, 0, +, *\}$.

Теорема (В.А. Похачевский, В.В. Быков, 2025)

Если функции $A: \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\xi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) непрерывны, то $\check{\nu}_{\circ}^* \in \mathfrak{U}_2(M)$ и $\hat{\nu}_{\circ}^* \in \mathfrak{L}_3(M)$.

Если функция A имеет непрерывные производные всех порядков по t , то также $\check{\nu}_{\circ}^+ \in \mathfrak{U}_2(M)$ и $\hat{\nu}_{\circ}^+ \in \mathfrak{L}_3(M)$.

Наибольший нижний слабый показатель

Рассмотрим параметрическое семейство линейных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M.$$

Теорема (И.Н. Сергеев, 2012)

Если функция A непрерывна, то функция

$$\mu \mapsto \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A(\cdot, \mu))} \check{\nu}_\circ^*[x], \quad \mu \in M,$$

принадлежит классу $\mathfrak{B}_2(M)$.

Теорема (В.А. Похачевский, В.В. Быков, 2025)

Если функция A имеет непрерывные производные всех порядков по t , то функция

$$\mu \mapsto \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A(\cdot, \mu))} \check{\nu}_\circ^+[x], \quad \mu \in M,$$

принадлежит классу $\mathfrak{U}_2(M)$.

Случай семейства систем на плоскости

В двумерном случае предыдущий результат допускает следующее обращение.

Теорема (В.А. Похачевский, В.В. Быков, 2025)

Для любой функции $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ класса $\mathfrak{U}_2(M)$ существует семейство **двумерных** линейных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M,$$

с функцией A , имеющей непрерывные производные всех порядков по t , такое, что функции

$$\mu \mapsto \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A(\cdot, \mu))} \check{\nu}_\circ^\varkappa[x], \quad \mu \in M, \quad \varkappa \in \{-, 0, +, *\},$$

совпадают с функцией f .

Теорема (В.А. Похачевский, В.В. Быков, 2025)

Для любой системы с непрерывными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

множества $\check{\nu}_\circ^*(S_*(A))$ и $\hat{\nu}_\circ^*(S_*(A))$ являются суслинскими. Если A имеет бесконечно дифференцируемые коэффициенты, то то же верно для множеств $\check{\nu}_\circ^+(S_*(A))$ и $\hat{\nu}_\circ^+(S_*(A))$.

Теорема (А.Х. Сташ, 2023)

Для произвольных $n \geq 3$ и суслинского множества $P \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, существует уравнение n -го порядка, спектры **верхних** частот Сергеева $\hat{\omega}^0, \hat{\omega}^-, \hat{\omega}^+$ и **верхних сильных** показателей колеблемости $\hat{\nu}_\bullet^0, \hat{\nu}_\bullet^-, \hat{\nu}_\bullet^+$ нулей, знаков и корней которого совпадают с множеством P .

Спасибо за внимание!

- ① Хаусдорф Ф. Теория множеств, М.-Л., 1937.
- ② Миллионщиков В. М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 3. С. 364–380.
- ③ Рахимбердиев М. И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Мат. заметки. 1982. Т. 31. Вып. 6. С. 925–931.
- ④ Карпук М. В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1332–1138.
- ⑤ Быков В. В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1579–1592.
- ⑥ Быков В. В. Полное описание спектров показателей Ляпунова непрерывных семейств линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 3–22.

- 7 Ветохин А. Н. Точный бэровский класс некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с компактно-открытой и равномерной топологиями // Современные проблемы математики и механики. 2015. Т. IX. Вып. 3. М., С. 54–71.
- 8 Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 10. С. 1307–1318.
- 9 Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
- 10 Сергеев И. Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.

- ❶ Быков В. В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 52. № 4. С. 419–425.
- ❷ Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320.
- ❸ Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1595–1609.
- ❹ Сташ А. Х. Об управлении спектрами верхних показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 5. С. 588–595.