

Групповая классификация ОДУ второго порядка специального вида

Дмитрий Дегтярев

Московский физико-технический институт,
Адыгейский государственный университет

2025

Введение

Будем рассматривать обобщённое уравнение второго порядка в следующем виде:

$$y_{xx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(y) y_x^m, \quad (1)$$

где $y_x = \frac{dy}{dx}$.

Сразу можно заметить, что при любом виде коэффициентов $a_m(y)$ уравнение (1) допускает преобразование трансляции $x' = x + a$ в силу автономности.

При постоянных коэффициентах a_m уравнение (1) допускает группу однородных растяжений $x' = e^a x$, $y' = e^a y$ и понижение порядка заменой $v(x) = y_x$.

Основные объекты

Однопараметрическая группа точечных преобразований уравнения (1) может быть задана с помощью дифференциального оператора X :

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2)$$

Уравнение (1), допускающее группу (2) с параметром a , инвариантно относительно замены переменных $x' = x'(x, y; a)$, $y' = y'(x, y; a)$, удовлетворяющей уравнениям Ли:

$$\begin{cases} \frac{dx'}{da} = \xi(x', y'), & x'(0) = x, \\ \frac{dy'}{da} = \eta(x', y'), & y'(0) = y. \end{cases} \quad (3)$$

Пример: растяжения $x' = e^a x$, $y' = e^a y$ генерируются оператором $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.

Некоторые определения

Можем определить продолженное пространство переменных $\{x, y, y_x, y_{xx}\}$, в котором определим продолженный оператор:

$$X_2 = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial y_x} + \zeta_{xx} \frac{\partial}{\partial y_{xx}}, \quad (4)$$

где $\zeta = \zeta(x, y, y_x, y_{xx}, \xi, \xi_x, \xi_{xx}, \eta, \eta_x, \eta_{xx})$.

Тогда, выполняется условие инвариантности поверхности F в продолженном пространстве относительно векторного поля X_2 :

$$X_2 F(x, y, y_x, y_{xx}) \Big|_{F=0} = 0, \quad (5)$$

Откуда, группируя по различным мономам вида $y^\alpha y_x^\beta y_{xx}^\gamma$, получаем определяющие уравнения на ξ, η .

Определяющее уравнение

Определяющее уравнение для (1) после расщепления по степеням y_x имеет вид (здесь и до групповой классификации

$$a'_i(y) = \frac{da_i(y)}{dy}$$

$$\eta_{xx} + a_0(\eta_y - 2\xi_x) - 4a_{-1}\xi_y - a'_0\eta - a_1\eta = 0, \quad (2.0)$$

$$2\eta_{xy} - \xi_{xx} - a_1\xi_x - 3a_0\xi_y - a'_1\eta - 2a_2\eta_x = 0, \quad (2.1)$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} - a_2\eta_y - 2a_1\xi_y - a'_2\eta - 3a_3\eta_x = 0, \quad (2.2)$$

$$\xi_{yy} + a_2\xi_y + a_3(2\eta_y - \xi_x) + a'_3\eta + 4a_4\eta_x = 0, \quad (2.3)$$

$$(4 - m)a_{m-1}\xi_y + (m + 1)a_{m+1}\eta_x + \\ + (m - 1)a_m\eta_y + (2 - m)a_m\xi_x + a'_m\eta = 0, \quad (2.m)$$

где $m \notin \{0, 1, 2, 3\}$.

Сужение

Будем считать, что коэффициенты $a_i(y) = 0, \forall i \notin -k, \dots, n$.
Тогда, определяющие уравнения с номерами $(-k-1)$ и $(n+1)$ примут вид

$$a_{-k}\eta_x = 0, \quad a_n\xi_y = 0,$$

откуда, следует, что $\eta_x = \xi_y = 0, \eta = \eta(y), \xi = \xi(x)$.

Определяющие уравнения при этом сильно упрощаются:

$$\eta a'_0 + 2\xi_x a_0 - \eta_y a_0 = 0, \quad (3.0)$$

$$\eta a'_1 + \xi_x a_1 + \xi_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

$$\eta a'_2 + \eta_y a_2 - \eta_{yy} = 0, \quad (3.2)$$

$$\eta a'_3 - \xi_x a_3 + 2\eta_y a_3 = 0, \quad (3.3)$$

$$\eta a'_m + (m-1)\eta_y a_m + (2-m)\xi_x a_m = 0, \quad m \notin \{0, 1, 2, 3\}. \quad (3.m)$$

Из (3.m) видно, что $\xi_x = \text{const}, \Rightarrow \xi(x) = C_2 x + C_1$.

Вычисление допускаемой алгебры

Далее, вид функции $\eta(y)$ получим из уравнения (3.0):

$$\eta = a_0 \left(2C_2 \int \frac{dy}{a_0} + C_3 \right). \quad (6)$$

По очереди принимая $C_i = 1$, $C_{j \neq i} = 0$, получим базисные операторы алгебры данного уравнения:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (7)$$

$$X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2a_0(y) \int \frac{dy}{a_0(y)} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (8)$$

$$X_3 = a_0(y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (9)$$

Сразу можно заметить, что операторы X_1 и X_3 образуют подалгебру, так как $[X_1, X_3] = 0$.

Коэффициенты уравнения

Оставшиеся коэффициенты уравнения выражаются через a_0 посредством функции $\eta(a_0)$:

$$a_1 = A_1 e^{-C_2 \int \frac{dy}{\eta}}, \quad (4.1)$$

$$a_2 = \frac{1}{\eta}(\eta_y + A_2), \quad (4.2)$$

$$a_3 = A_3 \eta^{-2} e^{C_2 \int \frac{dy}{\eta}}, \quad (4.3)$$

$$a_m = A_m \eta^{1-m} e^{(m-2)C_2 \int \frac{dy}{\eta}}. \quad m \notin \{0, 1, 2, 3\} \quad (4.m)$$

Интегрирование уравнений

Найдём понижающую порядок уравнения замену для оператора X_3 из условий $X_3 J_1 = 0$, $X_3 J_2 = 1$. Имеем $J_1 = x$,

$$J_2 := z = \int \frac{dy}{a_0(y)}.$$

Производные получаются из соотношений $y_x = a_0 z_x$,

$$y_{xx} = a_0 z_{xx} + a_0' z_x^2.$$

Так как замена находилась для оператора X_3 , при подстановке выражения для η , нужно принять $C_2 = 0$. Уравнение, в таком случае, примет вид

$$z_{xx} = \sum_{m=-k}^n A_m z_x^m, \quad (10)$$

который не зависит от коэффициентов исходного уравнения.

Выписать общее решение уравнения (10) можно приняв $v(x) = z_x$. Тогда,

$$x = \int \frac{dv}{\sum_{m=-k}^n A_m v^m} + B. \quad (11)$$

Групповая классификация

Получим групповые преобразования, переводящие уравнения вида (1) в уравнения такого же вида с, вообще говоря, отличающимися коэффициентами $a_i(y)$. Для этого исходное уравнение нужно расширить до системы требованиями на коэффициенты a_i , которые теперь также считаются координатами продолженного пространства

$$(x, y, y_x, y_{xx}, a_i), i \in -k, \dots, n: \frac{\partial a_i}{\partial x} = 0, \frac{\partial a_i}{\partial y_x} = 0, \forall i.$$

$$y_{xx} = \sum_{m=-k}^n a_m(y) y_x^m, \quad (12)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial y_x} = 0. \quad (14)$$

Новые операторы

Оператор, действующий на данную систему, можно записать в виде

$$E = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y + \sum_{m=-k}^n \mu_m(x, y, y_x, a_m)\partial_{a_m}. \quad (15)$$

Обозначим групповой параметр как b .

Оператор полного дифференцирования по x записывается как

$$\tilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + (a_m)_x \frac{\partial}{\partial a_m} + \dots = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (16)$$

аналогично, для y :

$$\tilde{D}_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} + (a_m)_{y'} \frac{\partial}{\partial a_m} + \dots = \frac{\partial}{\partial y'}. \quad (17)$$

Инвариантная замена

Определяющие уравнения для системы (12) имеют вид

$$\zeta_{xx} = \sum_{m=-k}^n [\mu_m y_x^m + m a_m y_x^{m-1} \zeta_x], \quad (18)$$

$$(\mu_m)_x - a'_m \eta_x = 0, \quad (19)$$

$$(\mu_m)_{y'} = 0. \quad (20)$$

Разрешение определяющих уравнений даёт следующий вид функций для оператора (15):

$$\xi = B_1, \eta = f(y), \mu_2 = f''(y), \mu_{m \neq 2} = 0, \quad (21)$$

где $f(y)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция. Соответствующие уравнения Ли (для группового параметра b):

$$\frac{dx'}{db} = B_1, \quad \frac{dy'}{db} = f(y'), \quad (22)$$

$$\frac{da'_2}{db} = \frac{d^2 f(y')}{dx^2}, \quad \frac{da'_{m \neq 2}}{db} = 0. \quad (23)$$

Конкретный пример замены 1

Положим $f(y) = e^{-y}$. Тогда, решение уравнений Ли даёт групповое преобразование с параметром b вида

$$x' = x + b, \quad (24)$$

$$y' = \ln(e^y + b), \quad (25)$$

$$a'_2 = a_2 + be^y + \frac{b^2}{2}, \quad (26)$$

$$a'_{m \neq 2} = a_{m \neq 2}. \quad (27)$$

Для подстановки в уравнение (1) выпишем обратные преобразования и преобразования производных:

$$x = x' - b, \quad y = \ln(e^{y'} - b), \quad (28)$$

$$a_2 = a'_2 - by' + \frac{b^2}{2}, \quad a_{m \neq 2} = a'_{m \neq 2}, \quad (29)$$

$$y_x = y'_{x'} \frac{e^{y'}}{e^{y'} - b}, \quad y_{xx} = y'_{x'x'} \frac{e^{y'}}{e^{y'} - b} - b(y'_{x'})^3 \frac{(e^{y'})^2}{(e^{y'} - b)^3}. \quad (30)$$

Конкретный пример замены 2

Для удобства обозначим $\gamma(y') = \frac{e^{y'}}{e^{y'} - b}$. После подстановки полученных выражений в (1), имеем

$$y'_{x'x'} = be^{-y'}(y'_{x'})^3\gamma^2 + b(y' - \frac{b}{2})(y'_{x'})^2\gamma^2 + \sum_{m=-k}^n a_m(y')(y'_{x'}\gamma)^m. \quad (31)$$

Переобозначая коэффициенты

$$a'_m(y') = a_m(y')\gamma^m, \quad m \neq 2, 3, \quad (32)$$

$$a'_2(y') = a_2(y')\gamma^2 + b(y' - \frac{b}{2})\gamma^2, \quad a'_3(y') = a_3(y')\gamma^3 + be^{-y'}\gamma^2, \quad (33)$$

получим искомый вид уравнения

$$y'_{x'x'} = \sum_{m=-k}^n a'_m(y')(y'_{x'})^m. \quad (34)$$

Список литературы

-  Ибрагимов, Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. — М: Наука, 1983. — 281 с.
-  Ибрагимов, Н.Х. Азбука группового анализа / Н. Х. Ибрагимов. // Математика, кибернетика. — 1989. — № 8.
-  Ибрагимов, Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. Х. Ибрагимов. // Математика, кибернетика. — 1991. — № 7.
-  CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / ed. N. H. Ibragimov, R. K. Gazizov, others. — Vol. 1: Symmetries, Exact Solutions, and Conservation Laws / W. F. Ames [et al.]. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — ISBN 0-8493-4488-3 (v. 1).
-  Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 399 с.