

Исследование числа независимых множеств в однородных регулярных линейных гиперграфах

Ярослав Демьянов

Московский физико-технический институт

Постановка задачи

Теорема (Ю.Жао)

Количество независимых множеств в d -регулярном графе на n вершинах не превосходит $(2^{d+1} - 1)^{\frac{n}{2d}}$.

Эта оценка точная и достигается на $\frac{n}{2d}$ копиях полного двудольного графа на $2d$ вершинах с равными размерами долей.

Постановка задачи

Самый общий вид рассматриваемой задачи - обобщить теорему на случай d -регулярных гиперграфов. Даже в случае, когда он является однородным и линейным, прогресса в ней на сегодняшний день немного. Более того, в случае гиперграфов существуют варианты как для сильных, так и слабых независимых множеств.

Постановка задачи

Задача

Дан k -дольный d -регулярный гиперграф $\mathcal{H}_k$, где каждая доля - независимая копия $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, и $(a, b, x_1, x_2, \dots, x_{k-2})$ является ребром (каждый элемент кортежа лежит в соответствующей доле), если выполняется следующая система равенств: $a + ib = x_i, i \in \{1, \dots, k-2\}$. Оценить число слабых независимых множеств в этом гиперграфе.

Смысл задачи

Гипотеза

На гиперграфах, имеющих вид некоторого числа непересекающихся копий $\mathcal{H}_k$ достигается верхняя оценка на количество слабых независимых множеств в k -однородных d -регулярных гиперграфах.

Цели и результаты

В работе исследован случай $d = N$, N является простым, k произвольное. Основным результатом является следующее утверждение:

Теорема

В указанных выше условиях для некоторого $\epsilon(k) > 0$ число независимых множеств в $\mathcal{H}_k$ не превосходит $k \cdot 2^{(k-1)N} + kN \cdot (2^{k-1} - 1)^N + O_k((2^{k-1} - 1 - \epsilon(k))^N)$.

В частности, подтверждена гипотеза о том, что больше всего будет независимых множеств, которые пересекаются с какой-либо из долей не более чем по одному элементу.

Методы доказательства

Для случая $k = 3$ этот результат был получен Семченковым, Шкредовым и Шабановым с помощью методов анализа Фурье. Остаточный член был уточнен в работе Балога и др., методы из этой работы применялись для получения настоящего результата.

Методы доказательства

Рассмотрение множеств производилось в зависимости от минимального размера пересечений с какой-либо долей. Если он равен 0 или 1, применимы простейшие комбинаторные рассуждения, они дают основные слагаемые $k2^{(k-1)N} + kN(2^{k-1} - 1)^N$.

Методы доказательства

Если минимальный размер пересечения d больше или равен 2, но не превосходит εN для некоторого удачно выбранного ε , то применяется не рассматриваемый ранее в подобных работах подход - вероятностный метод, в частности неравенство Янсона. Оно применимо вне зависимости от ограничений на пересечения с долями, но дает слабые оценки при больших размерах пересечения (т.к. нужно домножать еще на экспоненциальное число способов выбрать элементы в наименьшей доле).

Методы доказательства

Наилучшая оценка получится при $d = 2$ и имеет вид

$$\left(\frac{2^{k-1}}{e^{\frac{1}{2^{k-2}+k-1}}} \right)^N,$$

а из замечания выше мы выберем ε таким, что

$$k \left(\frac{2^{k-1}}{e^{\frac{1}{2^{k-2}+k-1}}} \right)^N \sum_{d=2}^{\varepsilon N} \binom{N}{d} \leq O_k((2^{k-1} - 1 - \epsilon_1(k))^N) \text{ для}$$

некоторого $\epsilon_1(k) > 0$.

Формулировки

Неравенство Янсона, следствие

Пусть Ω - некоторое конечное множество, $\mathcal{F}$ - система его подмножеств. Выберем случайное подмножество F , взяв каждый элемент ω с вероятностью p_ω независимо от остальных, и обозначим $I_A = \mathbb{I}(A \subset F)$.

Пусть также $X = \sum_{A \in \mathcal{F}} I_A$, $\lambda = \mathbb{E}X$, $\bar{\Delta} = \sum_{A \in \mathcal{F}} \sum_{B \in \mathcal{F}: A \cap B \neq \emptyset} \mathbb{E}I_A I_B$.

Тогда $P(X = 0) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{\bar{\Delta}}}$.

Методы доказательства

В случае больших размеров пересечений с долями применяется метод контейнеров - он также рассматривался в статье Балога. Его суть в том, что все независимые множества являются подмножествами некоторых множеств-контейнеров, коих не очень много, а ребер в них относительно мало.

Для применения нужна также лемма из аддитивной комбинаторики, доказанная уже простым вероятностным методом. Она утверждает, что если взять достаточно большое множество вершин, то индуцированный подграф обязательно должен содержать много ребер.

Формулировки

Метод контейнеров

Пусть $\mathcal{H}$ - r -регулярный гиперграф на N вершинах со средней степенью d . Зафиксируем $\tau > 0$. Для вершины v определим

$$d^{(j)}(v) := \max\{\text{число ребер, содержащее } X, v \in X, |X| = j\},$$

$$\delta_j := \frac{\tau^{1-j}}{dN} \sum_v d^{(j)}(v),$$

$$\delta(\mathcal{H}, \tau) := \mathbb{I}(d \neq 0) 2^{\binom{r}{2}-1} \sum_{j=2}^r 2^{-\binom{j-1}{2}} \delta_j.$$

Формулировки

Метод контейнеров

Пусть известно, что $0 < \varepsilon, \tau < 1/2$, $\tau < 1/(200 \cdot r \cdot r!^2)$, $\delta(\mathcal{H}, \tau) \leq \varepsilon/(12r!)$. Тогда существует семейство множеств $\mathcal{C}$, такое что

- каждое независимое множество есть подмножество некоторого $C \in \mathcal{C}$
- для всех $C \in \mathcal{C}$ $e(\mathcal{H}|_C) \leq \varepsilon e(\mathcal{H})$
- $\log |\mathcal{C}| = O_r(N_\tau \log(1/\varepsilon) \log(1/\tau))$

Формулировки

Лемма

Существует $\sigma > 0$, такая что для любого подмножества X рассматриваемого гиперграфа, $|X| \geq (\frac{k(k-2)}{k-1} + \frac{k}{k-1}\varepsilon)N$, индуцированный на X гиперграф содержит хотя бы σN^2 ребер.

Методы доказательства

Из леммы следует, что контейнеры не могут быть достаточно большими по размеру, а значит, число независимых множеств можно оценить просто количеством всех подмножеств контейнеров. Итоговая оценка составит $O_k(2^{\left(\frac{k(k-2)}{k-1} + k\varepsilon\right)N})$, что меньше полученного ранее и не влияет на асимптотику.

Анализ результатов

Гипотеза(Коэн и др.)

Пусть $r, d \geq 2$. Тогда для любого r -однородного, d -регулярного графа H на n вершинах выполнено

$$\frac{\log i(H)}{n} \leq \frac{r-1}{r} + \frac{\log r}{rd}.$$

Анализ результатов

Полученный в настоящей работе результат является опровержением гипотезы, так как для гиперграфа $\mathcal{H}$ - n/kN копий $\mathcal{H}_k$ - выполняется

$$\begin{aligned}\frac{\log i(\mathcal{H})}{n} &= \frac{1}{n} \log(k2^{(k-1)N} + kN(2^{k-1} - 1)^N - O(2^{(k-2)N}))^{n/kN} > \\ &> \frac{1}{n} \log(k2^{(k-1)N})^{n/kN} = \frac{k-1}{k} + \frac{\log k}{kN}.\end{aligned}$$

Анализ результатов

С помощью неравенства Янсона оценку количества независимых множеств для малых размеров пересечений с долями можно улучшить до

$$O\left(\left(\frac{2^{k-1}}{e^{\frac{1}{2^{k-1}}}\left(1-\frac{k-1}{2^{k-1}}\right)}\right)^N\right),$$

хотя серьезного изменения результата она по-прежнему не дает. Более того, аналогичными техниками можно получить и нетривиальные нижние оценки порядка $\frac{2^{k-1}}{e^{O\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right)}}$ в тех же условиях.

Дальнейшие планы

Планируется также уточнить оценку остаточного члена, рассмотрев, например, количество независимых множеств, наименьшие пересечения с долями которых равно 2, как делалось в работе Балоба. Это уже тяжелая комбинаторная задача.

Ожидается, что полученный результат обобщается и на l -независимые множества - для них пересечение с любым ребром имеет мощность не более l . На текущий момент получено, что для l -независимых множеств все вышеприведенные методы работают, за исключением случая нулевого пересечения с долями.