

**Институт прикладной математики и автоматизации - филиал
Федерального государственного бюджетного научного учреждения
«Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр
Российской академии наук»**

Гадзова Луиза Хамидбиевна

**ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ НАЙМАРКА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\partial_{0x}^\alpha u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\partial_{sx}^\alpha u(x) = \text{sign}^n(x - s) D_{sx}^{\alpha-n} u^{(n)}(x), \quad n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

– производная Герасимова – Капуто [1, с. 11. Нахушев А.М. 2003], [2, Новоженова О.Г. 2018], D_{sx}^α оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка α определяется следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{sx}^\alpha u(x) = \frac{\text{sign}(x - s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^x \frac{u(t)dt}{|x - t|^{\alpha+1}}, \quad \alpha < 0,$$

$$D_{sx}^\alpha u(x) = u(x), \quad \alpha = 0,$$

$$D_{sx}^\alpha u(x) = \text{sign}^n(x - s) \frac{d^n}{dx^n} D_{sx}^{\alpha-n} u(x), \quad n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

Новоженова О. Г. Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М.: Перо, 2018.

В работе [3], J. H. Barrett построил в терминах функции Миттаг-Леффлера решение начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

$$D_{ax}^{\alpha}u(x) = \lambda u(x) + v(x), \quad a < x < b, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} D_{ax}^{\alpha-i}u(x) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{где } n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}.$$

где D_{ax}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля. С течением времени такие уравнения стали называть уравнением Барретта [1, с. 98. Нахушев А.М. 2003], [4, с. 137. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006], [5, с. 192. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. 2014].

Barrett J. H. Differential equations of non-integer order // Canadian J. Math. 1954. Vol. 6, № 4. Pp. 529–541.

Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam. 2006. Vol. 204.

Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer Publishing Company, Incorporated. 2014.

В работах [6, Tamarkin J. 1928] и [7, Смогоржевский А. С. 1940] исследованы задачи с обобщенными краевыми условиями для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе [9, с. 16.] М. А. Наймарк предложил задачу определения функции y удовлетворяющей условиям

$$L(y) = 0, \quad U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

где $L(y)$ – дифференциальное выражение n -го порядка, $U_1(y), U_2(y), \dots, U_n(y)$ – линейно независимые линейные непрерывные функционалы. Такие задачи М. А. Наймарк называет обобщенной краевой задачей. В [8, с. 247. Камке Э. 1971] приводятся различные виды обобщения краевых условий.

Tamarkin J. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // *Mathematische Zeitschrift.* 1928. Vol. 27. Pp. 1–54.

Смогоржевский А. С. Функции Грина линейных дифференциальных систем в области одного измерения // *Матем. сб.* 1940. Т. 49. № 1. С. 179–196.

Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Пер. с нем. - 4-е изд., испр. М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971.

Задача Наймарка для уравнения

$$\partial_{0x}^\alpha u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad (1)$$

сформулирована и решена в работе [13, Гадзова Л. Х 2023].

В работе [14, Гадзова Л. Х 2024] для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования исследована задача Наймарка.

Методом функции Грина получено представление решения для уравнения (1), при $1 < \alpha \leq 2$, в работе [15, Гадзова Л. Х 2022].

Гадзова Л. Х. Задача Наймарка для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. заметки 2023. Т. 114. № 2. С. 195–202.

Гадзова Л. Х. Задача Наймарка для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 11. С. 1452–1459.

Гадзова Л. Х. Обобщённая краевая задача для обыкновенного дифференциала уравнения дробного порядком // Челяб. физ.-матем. журн. 2022. Т. 7. № 1. С. 20–29.

Регулярным решением уравнения

$$\partial_{0x}^\alpha u(x) + \lambda u(x) = f(x) \quad (1)$$

назовем функцию $u = u(x)$ из класса $AC^{n-1}[0, 1]$ (имеющую абсолютно непрерывные производные до порядка $n - 1$ на отрезке $[0, 1]$) и удовлетворяющую этому уравнению во всех точках интервала $(0, 1)$.

ЗАДАЧА. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющее условиям

$$\ell[u] = b, \quad (4)$$

где $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – заданный вектор столбец, $b_k \in \mathbb{R}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – заданный вектор столбец, $b_k \in \mathbb{R}$, $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)^T$ – вектор столбец, элементы которого линейные функционалы, с областью определения $D(\ell_k) \subset AC^{n-1}[0, 1]$, $k = \overline{1, n}$.

Решение задачи Коши для уравнения

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x) + \lambda u(x) = f(x) \quad (1)$$

(см. например [10, Псху А. В. 2005]) имеет вид

$$u(x) = \int_0^x f(t) \mathcal{W}_{\alpha}(x-t) dt + \mathcal{W}(x) \bar{u}, \quad (5)$$

где $\mathcal{W}(x) = (\mathcal{W}_n(x), \mathcal{W}_{n-1}(x), \dots, \mathcal{W}_1(x))$, $\bar{u} = (u(0), u'(0), \dots, u^{(n-1)}(0))^T$,

$$\mathcal{W}_{\mu}(x) = \begin{cases} x^{\mu-1} E_{\alpha, \mu}(-\lambda x^{\alpha}), & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}, \quad (6)$$

$E_{\delta, \mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\delta j + \mu)}$ – функция Миттаг–Леффлера (см, например, [4, Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006.], [10, Псху А. В. 2005.])

Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam. 2006. Vol. 204.

Лемма. Пусть $\frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, t) \in C([0, 1] \times [0, 1])$, $i = 0, 1, \dots, p$, ℓ – линейный ограниченный функционал в пространстве $C^p[0, 1]$. Тогда справедливо соотношение

$$\ell \left[\int_0^1 K(x, t) dt \right] = \int_0^1 \ell[K(x, t)] dt. \quad (7)$$

Заметим, что в формуле (7) функционал ℓ применяется к $K(x, t)$, как функция переменной x .

Доказательство. В силу условий наложенных на $K(x, t)$ можем записать [11, с. 222. Натансон И. П. 1974]

$$\int_0^1 K(x, t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m K \left(x, \frac{i}{m} \right).$$

Причем $K(x, \frac{i}{m}) \in C^p[0, 1]$ для любого i и $\ell[K(x, t)]$, как функция переменной t , является непрерывной на отрезке $[0, 1]$, поэтому [12, с. 124. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976]

$$\begin{aligned} \ell \left[\int_0^1 K(x, t) dt \right] &= \ell \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m K \left(x, \frac{i}{m} \right) \frac{1}{m} \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \ell \left[\sum_{i=0}^m K \left(x, \frac{i}{m} \right) \frac{1}{m} \right] = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \ell \left[K \left(x, \frac{i}{m} \right) \right] \frac{1}{m} = \int_0^1 \ell[K(x, t)] dt. \end{aligned}$$

Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

Теорема. Пусть $n \geq 2$, $D(\ell_k) = C^{n-2}[0, 1]$, $k = \overline{1, n}$, функция $f(x) \in C(0, 1)$ представима в виде

$$f(x) = D_{0x}^{\alpha-n} g(x), \quad g(x) \in L(0, 1), \quad (8)$$

и выполняется условие

$$\det A \neq 0, \quad (9)$$

где $A = \left\| \ell_i[\mathcal{W}_j(x)] \right\|$ – квадратная матрица, $i, j = \overline{1, n}$.

Тогда, при выполнении условия (9), существует единственное регулярное решение задачи (4) для уравнения (1), определяемое равенством

$$u(x) = \int_0^1 f(t) G(x, t) dt + \mathcal{W}(x) A^{-1} b, \quad (10)$$

где

$$G(x, t) = \mathcal{W}_\alpha(x - t) - \mathcal{W}(x) A^{-1} \ell[\mathcal{W}_\alpha(x - t)].$$

Функцией Грина задачи (4) для уравнения (1) назовем функцию

$$G(x, t) = \mathcal{W}_\alpha(x - t) - \mathcal{W}(x)A^{-1}\ell[\mathcal{W}_\alpha(x - t)],$$

обладающая свойствами 1-4.

Свойство 1. Функция $G(x, t)$ непрерывна для всех значений x и t из отрезка $[0, 1]$.

Свойство 2. $G(x, t)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[D_{1t}^{\alpha-1} G(x, t) \Big|_{t=x-\delta} - D_{1t}^{\alpha-1} G(x, t) \Big|_{t=x+\delta} \right] = 1.$$

Свойство 3. Функция $G(x, t)$ является решением уравнения

$$D_{1t}^\alpha G(x, t) + \lambda G(x, t) = 0.$$

Свойство 4. Функция $G(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\ell[G(x, t)] = 0, \quad D_{1t}^{\alpha-l} G(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad D_{1t}^{\alpha-l} G(x, t) \Big|_{t=1} = 0, \quad l = \overline{1, n}.$$

Случай нарушения условия разрешимости

Покажем, что если условие разрешимости (9) нарушается, то решение однородной задачи, вообще говоря, неединственно. Более точно, однородная задача, в этом случае, имеет нетривиальное решение.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(x) = \mathcal{W}(x)C,$$

где $\mathcal{W}(x)$ — определяется равенством (6), $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$ — произвольные постоянные.

Из (5) следует, что функция $\tilde{u}(x)$ является решением уравнения

$$\partial_{0x}^\alpha \tilde{u}(x) + \lambda \tilde{u}(x) = 0. \quad (11)$$

Так как $\det A = 0$, найдется такой ненулевой вектор $\tilde{C}$, что

$$\ell [\tilde{u}(x)] = \ell [\mathcal{W}(x)] \tilde{C} = A\tilde{C} = 0.$$

Таким образом показано, что функция

$$\tilde{u}(x) = \mathcal{W}(x)\tilde{C}$$

является решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет нулевым условиям

$$\ell [\tilde{u}(x)] = 0.$$

Список литературы

- [1] *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
- [2] *Новоженкова О. Г.* Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М.: Перо, 2018. 235 с.
- [3] *Barrett J. H.* Differential equations of non-integer order // Canadian J. Math. 1954. Vol. 6, no. 4. Pp. 529–541.
- [4] *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam. 2006. Vol. 204.
- [5] *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer Publishing Company, Incorporated. 2014.
- [6] *Tamarkin J.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Mathematische Zeitschrift. 1928. Vol. 27. Pp. 1–54.
- [7] *Смогоржевский А. С.* Функции Грина линейных дифференциальных систем в области одного измерения // Матем. сб. 1940. Т. 49. № 1. С. 179–196.
- [8] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Пер. с нем. - 4-е изд., испр. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит. 1971. 576 с.
- [9] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
- [10] *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
- [11] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
- [12] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
- [13] *Гадзова Л. Х.* Задача Наймарка для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Математические заметки 2023. Т. 114. № 2. С. 195–202.
- [14] *Гадзова Л. Х.* Задача Наймарка для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 11. С. 1452-1459.
- [15] *Гадзова Л. Х.* Обобщённая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Челяб. физ.-матем. журн. 2022. Т. 7. № 1. С. 20–29.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ