

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С "ДЕШЁВЫМ" УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ SIRC

Курина Г.А.

Воронежский государственный университет
kurina@math.vsu.ru

Одной из популярных инфекционных моделей является SIRC, в которой население делится на четыре части в зависимости от статуса: восприимчивые к заболеванию S (susceptible), заражённые I (infected), выздоровевшие R (recovered) и с перекрестным иммунитетом C (cross-immune). В [1] сформулирована задача минимизации квадратичного критерия качества на траекториях нелинейной модели SIRC с переменными состояниями S, I, R, C . Там же рассматривается линеаризованная модель SIRC на бесконечном промежутке. При этом оптимальное управление находится в форме обратной связи с помощью решения алгебраического матричного уравнения Риккати.

[1] Di Giamberardino P., Iacoviello D. A linear quadratic regulator for nonlinear SIRC epidemic model // 2019 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC).—Sinaia, 2019.—P. 733–738.

Важное значение в теории оптимального управления имеют задачи с так называемыми "дешёвыми" управлениями, численное решение которых затруднено. Асимптотическое решение линейно-квадратичных задач такого типа построено в [2]. Случай, когда не все управления являются дешёвыми, изучен в [3].

[2] O'Malley Jr. R. E., Jameson A. Singular perturbations and singular arcs-Part I // IEEE Trans. Automatic Control. 1975. V. AC-20, No. 2. P. 218–226.

[3] Курина Г. А. Об одной вырожденной задаче оптимального управления и сингулярных возмущениях // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, No. 3. С. 517–520.

Линеаризованная модель

В отличие от [1], рассматривается задача на конечном интервале, заключающаяся в минимизации функционала

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (w_1 x_1(t)^2 + 2w_1 x_1(t) S^e + w_2 x_2(t)^2 + 2w_2 x_2(t) I^e + \varepsilon^2 (u_1(t)^2 + u_2(t)^2)) dt \quad (1)$$

на траекториях линеаризованной модели SIRC

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t), \quad (2)$$

где

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T = (S(t) - S^e, I(t) - I^e, R(t) - R^e, C(t) - C^e)^T, \quad (3)$$

S^e, I^e, R^e, C^e - решение системы

$$\begin{aligned} \mu(1 - S) - \beta SI + \gamma C &= 0, & \beta SI + \nu\beta CI - (\mu + \alpha)I &= 0, \\ (1 - \nu)\beta CI + \alpha I - (\mu + \delta)R &= 0, & \delta R - \beta CI - (\mu + \gamma)C &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

обеспечивающее полную управляемость линеаризованной модели,

$$A = \begin{pmatrix} -\mu - \beta I & -\beta S & 0 & \gamma \\ \beta I & \beta S + \nu \beta C - \mu - \alpha & 0 & \nu \beta I \\ 0 & (1 - \nu) \beta C + \alpha & -\mu - \delta & (1 - \nu) \beta I \\ 0 & -\beta C & \delta & -\beta I - \mu - \gamma \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -\rho_1 S & 0 & \rho_1 S & 0 \\ 0 & -\rho_2 I & \rho_2 I & 0 \end{pmatrix}^T$$

при $S = S^e$, $I = I^e$, $C = C^e$,

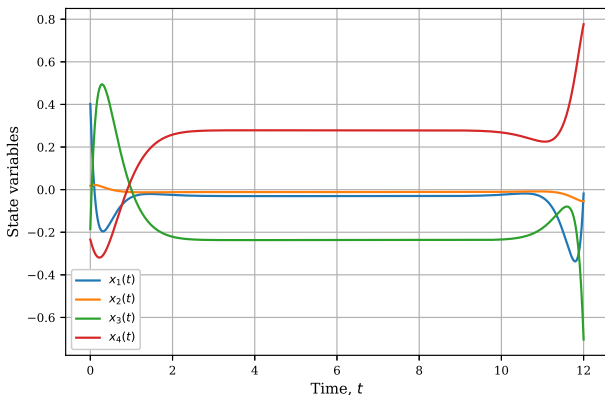
$$u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T,$$

$\varepsilon > 0$ -малый параметр.

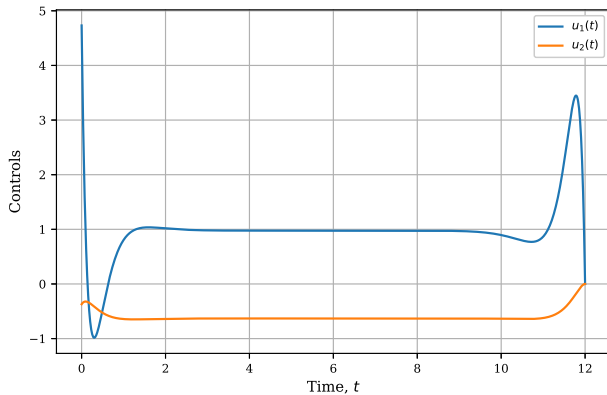
Значения всех параметров объясняются в [1].

Графики оптимальных траекторий (Python)

Значения параметров из практики [1]: $\varepsilon^2 = 0.001$, $\mu = 1/75$, $\gamma = 1/2$, $\alpha = 73$, $\delta = 1$, $\nu = 0.078$, $\beta = 146$, $S_0 = 0.88$, $I_0 = 0.02$, $R_0 = C_0 = 0.05$, $\rho_1 = \rho_2 = 2$, $w_1 = w_2 = 0.1$, $S^e = 0.47788$, $I^e = 0.0021407$, $R^e = 0.23520$, $C^e = 0.28479$.



Графики оптимальных управлений (Python)



Преобразование задачи

После замены переменных

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t), y_2(t) = x_4(t), \\ y_3(t) &= -x_1(t)/(\rho_1 S^e), y_4(t) = -x_2(t)/(\rho_2 I^e) + x_4(t) \end{aligned} \quad (5)$$

в преобразованном уравнении состояния перед управлением будет стоять матрица

$$\tilde{B} = (0, I_2)^T,$$

где 0 - нулевая, а I_2 - единичная матрицы второго порядка.

Из принципа максимума Понтрягина следует, что оптимальное управление в преобразованной задаче имеет вид

$$u(t) = \tilde{B}^T \varphi(t) / \varepsilon^2, \quad (6)$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t))^T$ - сопряженная переменная.

Двухточечная краевая задача в критическом случае

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} z_1(t) &= (y_1(t), y_2(t))^T, z_2(t) = (y_3(t), y_4(t))^T, \\ \zeta_1(t) &= (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T, \zeta_2(t) = (\varphi_3(t), \varphi_4(t))^T, \end{aligned} \quad (7)$$

двухточечную краевую задачу, вытекающую из принципа максимума Понтрягина, можно записать в виде

$$\begin{aligned} dz_1/dt &= A_{11}z_1 + A_{12}z_2, \quad z_1(t_0) = z_1^0, \\ \varepsilon^2 dz_2/dt &= \varepsilon^2 A_{21}z_1 + \varepsilon^2 A_{22}z_2 + \zeta_2, \quad z_2(t_0) = z_2^0, \\ d\zeta_1/dt &= W_{11}z_1 + W_{12}z_2 - A_{11}^T \zeta_1 - A_{21}^T \zeta_2 + b_1, \quad \zeta_1(t_1) = 0, \\ d\zeta_2/dt &= W_{12}z_1 + W_{22}z_2 - A_{12}^T \zeta_1 - A_{22}^T \zeta_2 + b_2, \quad \zeta_2(t_1) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Последняя система является сингулярно возмущенной в критическом случае, так как быстрая переменная $\mathbf{z}_2(t)$ не может быть однозначно определена из вырожденного уравнения для этой переменной при $\varepsilon = 0$ (см. [4]). Учитывая вид коэффициентов, нетрудно установить, что имеет место случай 1 в терминологии [2].

[4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.—М.: МГУ, 1978.—С. 108.

Для полученной двухточечной краевой задачи построена асимптотика решения вида

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (\bar{v}_j(t) + \Pi_j v(\tau) + Q_j v(\sigma)), \quad (9)$$

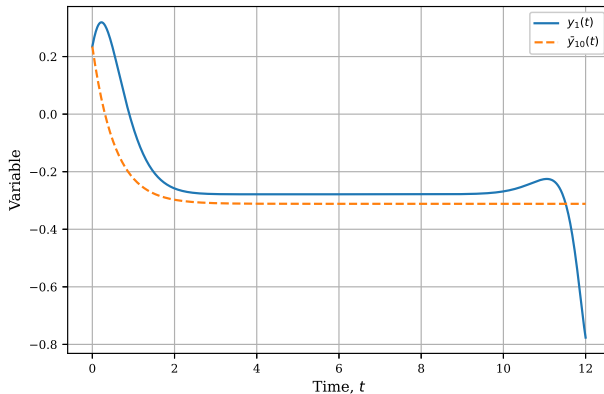
где $v = (z_1^T, z_2^T, \zeta_1^T, \zeta_2^T)^T$, $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$, $\sigma = (t - t_1)/\varepsilon$, $\Pi_j v(\tau)$ и $Q_j v(\sigma)$ являются пограничными функциями, значения которых существенны только в окрестностях точек $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно.

Последовательность определения первых членов асимптотики следующая: $\bar{\zeta}_{20}(t) = \bar{\zeta}_{21}(t) = 0$, $\Pi_0 z_1(\tau) = \Pi_0 \zeta_1(\tau) = \Pi_0 \zeta_2(\tau) = 0$, $Q_0 z_1(\sigma) = Q_0 \zeta_1(\sigma) = Q_0 \zeta_2(\sigma) = 0$, $\bar{z}_{10}(t_0)$, $\bar{\zeta}_{10}(t_1)$, $Q_1 \zeta_2(\sigma) = Q_0 z_2(\sigma) = Q_1 z_1(\sigma) = 0$, $(\bar{z}_{10}(t), \bar{\zeta}_{10}(t))$, $\bar{z}_{20}(t)$, $\bar{\zeta}_{22}(t)$, $\Pi_0 z_2(\tau)$, $\Pi_1 \zeta_2(\tau)$, $\Pi_1 z_1(\tau)$, $\Pi_1 \zeta_1(\tau)$, $\bar{z}_{11}(t_0)$, $Q_1 \zeta_1(\sigma) = 0$, $\bar{\zeta}_{11}(t_1) = 0$, $(\bar{z}_{11}(t), \bar{\zeta}_{11}(t))$, $\bar{z}_{21}(t)$, $\Pi_1 z_2(\tau)$, $\Pi_2 \zeta_2(\tau)$, $Q_2 \zeta_2(\sigma)$, $Q_1 z_2(\sigma)$.

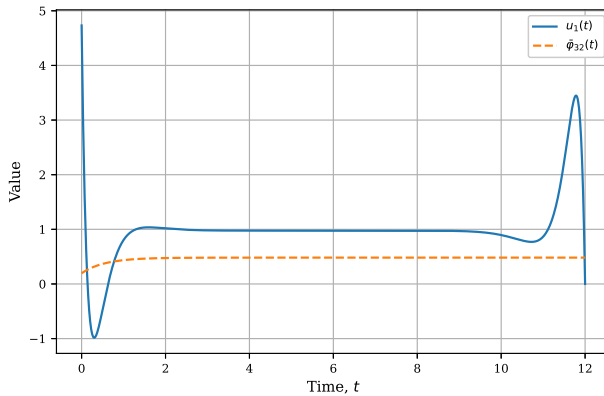
Найденные значения позволяют записать асимптотику оптимального управления исходной задачи в виде

$$u(t) = \Pi_1 \zeta_2(\tau)/\varepsilon + \bar{\zeta}_{22}(t) + \Pi_2 \zeta_2(\tau) + Q_2 \zeta_2(\sigma) + O(\varepsilon). \quad (10)$$

Главный член регулярного ряда для $y_1(t)$



Главный член регулярного ряда для $u_1(t)$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!