

О спектрах ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости двумерных дифференциальных систем

Лобода Надежда Алексеевна
Сташ Айдамир Хазретович

Адыгейский государственный университет, КМЦ АГУ

V Всероссийская научная конференция
«Осенние математические чтения в Адыгее»
Майкоп, 9–14 октября 2025 г.

Список основных исследователей

Ж. Штурм, А. Кнезер, В.А. Кондратьев, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, Н.А. Изобов, Н.В. Адамов, А.Ю. Левин, В.А. Козлов, А.Д. Мышкис, И.В. Каменев, Дж.Д. Мирзов, И.В. Асташова, С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов, В.В. Рогачев и другие.

Основные задачи

В основном изучались вопросы, связанные с наличием у заданного уравнения или системы хотя бы одного колеблющегося решения, а также с описанием всего множества таких решений или каких-либо дополнительных их свойств. Немало усилий в этих работах было направлено на получение коэффициентных признаков наличия или отсутствия колеблющихся решений.

Показатели Ляпунова и Перрона

$$\lambda(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|, \quad \pi(x) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_*^n$, $|x(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + \dots + x_n^2(t)}$.

Пример

Для вектор-функции $x \in \mathbb{R}_*^n$ с нормой $|x(t)| = \exp \gamma t$ ее показатели равны $\lambda(x) = \pi(x) = \gamma$.

Список основных исследователей

А.М. Ляпунов, О. Перрон, Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, Д.М. Гробман, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов, А.В. Ильин, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.К. Макаров, В.В. Быков, Е.А. Барабанов, С.Н. Попова, А.С. Фурсов, А.Н. Ветохин и другие.

Список основных исследователей

И.Н. Сергеев, А.Х. Сташ, В.В. Быков, Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич, А.Ю. Горицкий, М.В. Смоленцев, Д.С. Бурлаков, С.В. Цой, В.В. Миценко, М.Д. Лысак, А.Е. Артисевич, Е.М. Шишлянников, В.И. Кокушкин и другие.

Основные задачи

Изучались спектры (множества значений на всех ненулевых решениях) характеристик колеблемости для различных классов уравнений и систем, связи между значениями показателей и коэффициентами уравнений и систем, а также связи этих характеристик друг с другом.

Показатели колеблемости

Верхние сильный и слабый показатели колеблемости нулей вектор-функции $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_*^n$ зададим соответственно формулами

$$\hat{\nu}_\bullet(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t),$$

$$\hat{\nu}_\circ(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t),$$

где $\nu(x, m, t)$ — число нулей скалярного произведения $\langle x(\cdot), m \rangle$ и $\mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Вариация следа

Для функции $u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ и числа $t > 0$ введем *вариацию следа*

$$P(u, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(u, \tau) \right| d\tau, \quad e(u, \tau) \equiv \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|},$$

функции u за время от 0 до t .

Геометрический смысл

Геометрический смысл вариации следа функции u — это полная *длина пути* на единичной сфере конца единичного вектора $e(u, \tau)$ при $\tau \in [0; t]$.

Показатели блуждаемости

Верхние сильный и слабый показатели блуждаемости функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$ зададим равенствами

$$\hat{\rho}_\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t),$$

$$\hat{\rho}_\circ(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} P(Lx, t),$$

где $\text{Aut } \mathbb{R}^n$ — множество всех невырожденных линейных операторов $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Спектр показателя системы

Множество всех значений показателя системы $\varkappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовём *спектром* этого показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$, причем значение $a \in \varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ назовем *существенным*, если подмножество

$$\{x(0) \mid x \in \mathcal{S}_*(A), \varkappa(x) = a\} \subset \mathbb{R}^n$$

имеет положительную меру Лебега.

Через $\text{ess } \varkappa(\mathcal{S}_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя $\varkappa$ для системы A .

Вырожденный случай

Все показатели колеблемости и блуждаемости на множестве решений линейных однородных уравнений первого порядка равны нулю.

И.Н.Сергеев, 2006

Все верхние (как и все нижние) показатели колеблемости и блуждаемости на множестве решений двумерных систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, равны между собой и их спектры состоят из одного значения.

И.Н.Сергеев 2009, Д.С.Бурлаков 2013

При любом $n > 1$ для произвольной автономной системы $A \in \mathcal{M}^n$ и любого показателя

$$\varkappa = \check{\nu}_0, \hat{\nu}_0, \check{\nu}_\bullet, \hat{\nu}_\bullet, \check{\rho}_0, \hat{\rho}_0, \check{\rho}_\bullet, \hat{\rho}_\bullet,$$

справедливо равенство

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = \{|\operatorname{Im} \lambda_1(A)|, \dots, |\operatorname{Im} \lambda_n(A)|\}$$

где $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ — собственные значения матрицы A .

Следствие

Спектры показателей колеблемости и блуждаемости любой автономной системы содержат одно существенное значение.

А.Х. Сташ, 2012

Доказано существование двумерной линейной однородной периодической системы, спектры показателей колеблемости которой содержат наперед заданное число существенных значений.

Е.М. Шишляников, 2017

Для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, доказано существование линейной однородной двумерной системы (периодической, если все элементы заданного множества соизмеримы), у которой спектр значений показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны.

Теорема 1

Для любого конечного множества $S \subset (0, +\infty)$ существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$ (периодичная, если все элементы множества S соизмеримы), что справедливы равенства

$$\check{\nu}_o(x) = \hat{\nu}_o(x) = \check{\nu}_\bullet(x) = \hat{\nu}_\bullet(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A)$$

$$\hat{\nu}_\bullet(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \hat{\nu}_\bullet(\mathcal{S}_*(A)) = S \cup \{0\}.$$

А.Х. Сташ, 2012

Доказано существование линейной однородной двумерной системы, спектры показателей колеблемости которой содержат счетные множества существенных значений.

Е.М. Шишлянников, 2016

Для любого замкнутого ограниченного счетного множества неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой, построил двумерную линейную систему, у которой спектры показателей блуждаемости совпадают с этим множеством, причем все значения существенны.

Теорема 2

Для любой положительной последовательности (a_i) рациональных чисел, сходящейся к нулю, существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, для которой справедливы равенства

$$\check{\nu}_o(x) = \hat{\nu}_o(x) = \check{\nu}_\bullet(x) = \hat{\nu}_\bullet(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A)$$

$$\hat{\nu}_\bullet(\mathcal{S}_*(A)) = \text{ess } \hat{\nu}_\bullet(\mathcal{S}_*(A)) = \{0\} \cup \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Линейная система первого приближения

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \\ |f(t, x)| &\leq a_f(t)|x| + b_f(t), \quad a_f, b_f \in C(\mathbb{R}_+),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0);\tag{2}$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - A(t)x| = o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

$x_f(\cdot, x_0)$ — решение, определенное на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее $x_f(0, x_0) = x_0$;

$S_*(f)$ — множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1);

$S_*(A)$ — множество всех ненулевых решений системы (2).

О. Перрон 1930

Показал, что отрицательность старшего характеристического показателя системы первого приближения не всегда влечет за собой устойчивость нулевого решения исходной системы. Более того, в сколь угодно малой окрестности нуля могут существовать решения исходной системы с положительным характеристическим показателем.

Г.А. Леонов 2003

Открыл антиперроновский эффект смены знака характеристических показателей: решение системы первого приближения имеет положительный характеристический показатель, а решение исходной системы с теми же начальными данными – отрицательный показатель.

Н.А. Изобов, А.В. Ильин 2015, 2017, 2019

Доказано существование двумерной нелинейной дифференциальной системы с линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные характеристические показатели, а спектр показателей Ляпунова возмущенной системы может совпадать с наперед заданным бесконечным множеством.

И.Н. Сергеев 2023

Для любых $0 \leq \beta < +\infty$ и $0 \leq \gamma \leq +\infty$ существует система (1) с системой (2) первого приближения, удовлетворяющая при любом

$$\varkappa = \check{\nu}_0, \hat{\nu}_0, \check{\nu}_\bullet, \hat{\nu}_\bullet, \check{\rho}_0, \hat{\rho}_0, \check{\rho}_\bullet, \hat{\rho}_\bullet,$$

равенствам

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(A)) = \{\beta\}, \quad \varkappa(\mathcal{S}_*(f)) = \{\gamma\}.$$

А.Х. Сташ 2023, 2025

Доказал возможность изменения мощности спектров показателей колеблемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения.

Теорема 3.

Для любых $p > 1$ и непустого подмножества $S \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $S = [0, 1]$ существует система вида (1) с линейным приближением

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv g(t, x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2} \sin t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - g(t, x)| \leq |x|^p,$$

обладающие при любом $\varkappa = \check{\rho}_o, \hat{\rho}_o, \check{\rho}_\bullet, \hat{\rho}_\bullet$ свойствами

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(g)) = \{1\}, \quad \varkappa(\mathcal{S}_*(f)) = S \cup \{1\},$$

причем при любом $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\text{card}(\{\varkappa(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\}) = \text{card}(\varkappa(\mathcal{S}_*(f))).$$

- Реализованы произвольные конечные существенные спектры всех показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем.
- Реализован определенный класс счетных существенных спектров всех показателей колеблемости двумерных линейных однородных дифференциальных систем.
- Установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех линейных показателей блуждаемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения.

Основные работы автора по теме доклада

1. Сташ А.Х. Лобода Н.А. К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 348–356.
2. Сташ А.Х., Лобода Н.А. О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 4. С. 500–507.
3. Stash A. Kh., Loboda N.A. On the realization of finite essential spectra of oscillation exponents of two-dimensional differential systems // Differential Equations. 2024. Vol. 60. № 4. P. 472-478.
4. Лобода Н.А. Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения // Вестник российских ун-тов. Математика. 2024. Т. 29, № 146. С. 176–187.

5. Сташ А.Х., Лобода Н.А. Об изменении мощности спектра точного и абсолютного показателя блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения// Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 3. С. 316–329.
6. Stash A. Kh., Loboda N.A. On the difference in cardinalities of the spectra of exact and absolute wandering indicators between a two-dimensional nonlinear system and the first approximation system// Differential Equations. 2025. Vol. 61, № 3. P. 286–300.
7. Сташ А.Х., Лобода Н.А. О реализации счетных существенных спектров показателей колеблемости линейной однородной двумерной дифференциальной системы // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2025. Т.31. № 1. С. 199-209.

Спасибо за внимание!