

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Макаова Рузанна Хасанбиевна

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

11 октября 2025 г.

Рассмотрим уравнение

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [au(x, y) + bD_{0y}^{\alpha} u(x, \eta)] = f(x, y), \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, где a, b – заданные положительные числа; D_{0y}^{α} – частная производная по переменной y порядка $\alpha \in]0, 1]$; $f(x, y)$ – известная функция; $u(x, y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с обыкновенным уравнением Аллера¹, которое относят к уравнениям псевдопараболического типа².

В работах^{3, 4} для уравнения (1) рассмотрены первая и вторая краевые задачи в нелокальной постановке, для которых решения выписываются в явном виде.

¹Hallaire M. L'eau et la production végétale // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964.

²Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, No 1. Pp. 1–26.

³Макаова Р.Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, No 3. С. 35–38.

⁴Макаова Р. Х. Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана – Лиувилля // Вестник АГУ. Серия 4: Естественно- математические и технические науки. 2017. Т. 4, No 211. С. 36–41.

Решению различных локальных, нелокальных и смешанных задач для псевдопараболических уравнений, в частности, и для уравнения Аллера посвящены работы 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

⁵Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, No 1. Pp. 1–26.

⁶Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, No 1. Pp. 1–26.

⁷Баренблатт Г. И., Желтов И. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24, No 5. С. 852–864.

⁸Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} u_{tx}$ on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 19, No 2. Pp. 100–116.

⁹Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Differ. Equations. 1972. Vol. 12, No 3. Pp. 559–565.

¹⁰Янггарбер В. А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса // Прикладная механика и техническая физика. 1967. Т. 8, No 1. С. 91–96.

¹¹Kozhanov A. I. On a Nonlocal Boundary Value Problem with Variable Coefficients for the Heat Equation and the Aller Equation // Differ. Uravn. 2004. Vol. 40, No 6. Pp. 763–774.

¹²Макаова Р.Х. Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Доклады АМАН. —2015. Т. 17, No 1. С. 22–24.

¹³Макаова Р. Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 4-1, No 16. С. 45–49.

¹⁴Макаова Р. Х. Смешанная задача для неоднородного уравнения Аллера // Доклады АМАН. 2021. Т. 21, No 4. С. 18–21.

Оператор дробного интегро - дифференцирования D_{cy}^γ в смысле Римана - Лиувилля по переменной y порядка $\gamma \in \mathbb{R}$ с началом в точке c и с концом в точке y , который действует на функцию $g(y)$, определяется следующим образом¹⁵:

$$D_{cy}^\gamma g(\eta) = \frac{\text{sign}(y - c)}{\Gamma(-\gamma)} \int_c^y \frac{g(\eta) dt}{|y - \eta|^{\gamma+1}}, \quad \gamma < 0;$$

$$D_{cy}^\gamma g(\eta) = g(y), \quad \gamma = 0;$$

$$D_{cy}^\gamma g(\eta) = \text{sign}^n(y - c) \frac{d^n}{dy^n} D_{cy}^{\gamma-n} g(\eta), \quad n - 1 < \gamma \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\Gamma(z)$ – есть гамма - функция Эйлера.

Для функции $u = u(x, y)$, зависящей от двух переменных, оператор частного интегро - дифференцирования $D_{cy}^\gamma u(x, \eta)$ по переменной y определяется так же, как и для функции одной переменной, при этом вторая переменная x рассматривается как параметр.

¹⁵Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.

В области Ω рассмотрим функцию

$$G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x;y)=\frac{y^{\beta-1}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n|x|^n}{n!}b^{-\rho}E_{\alpha,\beta}^{\rho}\left(-\frac{a}{b}y^{\alpha}\right), \quad (2)$$

где $\rho = \frac{n+1}{2}$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$.

Здесь

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!}, \quad z, \alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0$$

– есть обобщенная функция Миттаг-Леффлера ¹⁶, которая в литературе также называют функцией Прабхакара или трехпараметрической функцией Миттаг-Леффлера.

Через $(\rho)_k$ обозначают символ Похгаммера, который определяется равенством

$$(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)} = \begin{cases} \rho(\rho+1)\dots(\rho+k-1), & k \in \mathbb{N}, \rho \in \mathbb{C}; \\ 1, & k=0, \rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

¹⁶Prabhakar T.R. A Singular Integral Equation with a Generalized Mittag-Leffler Function in the Kernel // Yokohama Mathematical Journal. 1971. Vol. 19. Pp. 7 - 15.

Для обобщенной функции Миттаг-Леффлера справедливы следующие формулы интегро - дифференцирования

$$\frac{d^n}{dz^n} \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho}(\lambda z^{\alpha}) \right] = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}^{\rho}(\lambda z^{\alpha}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$D_{0y}^{-\mu} \left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho}(-ct^{\alpha}) \right] = y^{\beta+\mu-1} E_{\alpha,\beta+\mu}^{\rho}(-cy^{\alpha}), \quad \mu > 0 \quad (4)$$

и формула автотрансформации¹⁷

$$E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\rho}(z) - E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\rho-1}(z) = z E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z). \quad (5)$$

¹⁷Shukla A.K., Prajapati J.C. On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 336. Pp. 797 – 811.

Учитывая формулы (3)-(5), получаем некоторые свойства для функции $G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y)$, которая определяется формулой (2).

Свойство 1⁰. Для функции $G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y)$ справедлива формула интегрирования дробного порядка

$$D_{0y}^{-\mu} G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; t) = G_{\alpha,\beta+\mu}^{\rho}(x; y), \quad \mu > 0. \quad (6)$$

Свойство 2⁰. Для функции $G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y)$ справедливы формулы дифференцирования целого порядка $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y) = G_{\alpha,\beta-n}^{\rho}(x; y); \quad (7)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y) = (-\text{sign}(x))^n G_{\alpha,\beta}^{\rho+n\frac{1}{2}}(x; y). \quad (8)$$

Свойство 3⁰. Для функции $G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y)$ справедлива формула дифференцирования дробного порядка

$$D_{0y}^{\mu} G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; t) = G_{\alpha,\beta-\mu}^{\rho}(x; y), \quad \mu > 0. \quad (9)$$

Свойство 4⁰. Для функции $G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y)$ выполняется равенство

$$G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y) - b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y) = a G_{\alpha,\beta+\alpha}^{\rho+1}(x; y). \quad (10)$$

Свойство 5⁰. Функцию $G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y)$ можно записать в терминах функции Райта следующим образом

$$G_{\alpha,\beta}^{\rho}(x; y) = \frac{y^{\beta-1}}{2\sqrt{b}} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \phi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{t}{b}}|x|\right) \phi\left(\alpha, \beta; -\frac{a}{b}ty^{\alpha}\right) dt, \quad (11)$$

где функция Райта определяется как степенной ряд¹⁸

$$\phi(\rho, \beta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\rho k + \beta)}, \quad \rho > -1, \quad \beta, z \in \mathbb{C}.$$

¹⁸Wright E.M. The Asymptotic Expansion of the Generalized Bessel Function // Proceedings of the London Mathematical Society, : 1935. s2-38. Pp. 257–270.

Лемма. Пусть $0 \leq \eta < y$ и $x, \xi \in \mathbb{R}$. Функция $G_{\alpha, \alpha}^{\rho}(x - \xi; y - \eta)$ является решением уравнения

$$D_{\eta y}^{\alpha} G_{\alpha, \alpha}^{\rho}(x - \xi; t - \eta) - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_{\alpha, \alpha}^{\rho}(x - \xi; y - \eta) - b D_{\eta y}^{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_{\alpha, \alpha}^{\rho}(x - \xi; t - \eta) = 0 \quad (12)$$

как функция переменных x, y и является решением уравнения

$$D_{y \eta}^{\alpha} G_{\alpha, \alpha}^{\rho}(x - \xi; y - t) - a \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} G_{\alpha, \alpha}^{\rho}(x - \xi; y - \eta) - b D_{y \eta}^{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} G_{\alpha, \alpha}^{\rho}(x - \xi; y - t) = 0 \quad (13)$$

как функция переменных ξ, η .

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$ и $D_{0y}^\alpha u, D_{0y}^\alpha u_{xx}, u_{xx} \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω .

Задача Коши. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$, удовлетворяющее уравнению (1) и начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in]0, 1], \quad (14)$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция.

Теорема. Пусть функция $y^{1-\alpha}f(x, y) \in C(\Omega)$, $\varphi(x), \varphi''(x) \in C(\mathbb{R})$ Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области Ω удовлетворяющее условию (14) и представимое в виде

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha, \alpha}^\rho(x - \xi; y) [\varphi(\xi) - b\varphi''(\xi)] d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^y G_{\alpha, \alpha}^\rho(x - \xi; y - \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где функция $G_{\alpha, \alpha}^\rho(x - \xi; y - \eta)$ определяется равенством (2).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!