

Справедливый делёж благ и обязанностей: в чём отличие?

Даниил Мусатов^{1,2}

¹МФТИ, ²КМЦ АГУ

V Международная научная конференция
«Осенние математические чтения в Адыгее»
13 октября 2025

Когда возникает вопрос о справедливом дележе

- Раздел наследства
- Делёж имущества при разводе
- Делёж активов при банкротстве
- Расформирование общего предприятия
- Распределение прибыли
- Раздача рабочих заданий

Когда возникает вопрос о справедливом дележе

- Раздел наследства
- Делёж имущества при разводе
- Делёж активов при банкротстве
- Расформирование общего предприятия
- Распределение прибыли
- Раздача рабочих заданий
- Общая характеристика: агенты по-разному оценивают части актива

Когда возникает вопрос о справедливом дележе

- Раздел наследства
- Делёж имущества при разводе
- Делёж активов при банкротстве
- Расформирование общего предприятия
- Распределение прибыли
- Раздача рабочих заданий
- Общая характеристика: агенты по-разному оценивают части актива
- Но в последнем примере оценки отрицательные

Разрезание пирога



Классическая задача: делёж пирога

- Непрерывное частное благо с аддитивными оценками

Классическая задача: делёж пирога

- Непрерывное частное благо с аддитивными оценками
- Формально: пирог это отрезок или фигура большей размерности X

Классическая задача: делёж пирога

- Непрерывное частное благо с аддитивными оценками
- Формально: пирог это отрезок или фигура большей размерности X
- N агентов, у каждого — абсолютно непрерывная мера:
 - В одномерном случае: достаточно задания на конечных объединениях отрезков

Классическая задача: делёж пирога

- Непрерывное частное благо с аддитивными оценками
- Формально: пирог это отрезок или фигура большей размерности X
- N агентов, у каждого — абсолютно непрерывная мера:
 - В одномерном случае: достаточно задания на конечных объединениях отрезков
 - **Неотрицательность:** $v_i(S) \geq 0$
 - **Нормированность:** $v_i(X) = 1$

Классическая задача: делёж пирога

- Непрерывное частное благо с аддитивными оценками
- Формально: пирог это отрезок или фигура большей размерности X
- N агентов, у каждого — абсолютно непрерывная мера:
 - В одномерном случае: достаточно задания на конечных объединениях отрезков
 - Неотрицательность: $v_i(S) \geq 0$
 - Нормированность: $v_i(X) = 1$
 - Аддитивность: $v_i(S \sqcup T) = v_i(S) + v_i(T)$

Классическая задача: делёж пирога

- Непрерывное частное благо с аддитивными оценками
- Формально: пирог это отрезок или фигура большей размерности X
- N агентов, у каждого — абсолютно непрерывная мера:
 - В одномерном случае: достаточно задания на конечных объединениях отрезков
 - Неотрицательность: $v_i(S) \geq 0$
 - Нормированность: $v_i(X) = 1$
 - Аддитивность: $v_i(S \sqcup T) = v_i(S) + v_i(T)$
 - Непрерывность: $\forall S \forall \alpha \in (0, 1) \exists T \subset S v_i(T) = \alpha v_i(S)$

Классическая задача: делёж пирога

- Непрерывное частное благо с аддитивными оценками
- Формально: пирог это отрезок или фигура большей размерности X
- N агентов, у каждого — абсолютно непрерывная мера:
 - В одномерном случае: достаточно задания на конечных объединениях отрезков
 - Неотрицательность: $v_i(S) \geq 0$
 - Нормированность: $v_i(X) = 1$
 - Аддитивность: $v_i(S \sqcup T) = v_i(S) + v_i(T)$
 - Непрерывность: $\forall S \forall \alpha \in (0, 1) \exists T \subset S v_i(T) = \alpha v_i(S)$
- Для обязанностей будем обозначать меру за $c_i(S)$, а условия те же.

Определение 1

Делёж является пропорциональным, если каждый из N агентов считает, что его доля составляет хотя бы $\frac{1}{N}$ от всего пирога. Формально,

Определение 1

Делёж является пропорциональным, если каждый из N агентов считает, что его доля составляет хотя бы $\frac{1}{N}$ от всего пирога. Формально,

$$\forall i \ v_i(S_i) \geq \frac{1}{N} v_i(X).$$

Характеристики дележа: пропорциональность

Определение 1

Делёж является пропорциональным, если каждый из N агентов считает, что его доля составляет хотя бы $\frac{1}{N}$ от всего пирога. Формально,

$$\forall i \ v_i(S_i) \geq \frac{1}{N} v_i(X).$$

Эквивалентно: каждый агент считает, что его доля не хуже, чем средняя доля остальных.

Характеристики дележа: пропорциональность

Определение 1

Делёж является пропорциональным, если каждый из N агентов считает, что его доля составляет хотя бы $\frac{1}{N}$ от всего пирога. Формально,

$$\forall i \ v_i(S_i) \geq \frac{1}{N} v_i(X).$$

Эквивалентно: каждый агент считает, что его доля не хуже, чем средняя доля остальных.

Для антиблаг:

$$\forall i \ c_i(S_i) \leq \frac{1}{N} c_i(X).$$

Простейший случай: делёж на двоих

- Всем известный метод: один делит, другой выбирает
- Один и тот же метод годится и для благ, и для обязанностей!
- Вариант с движущимся ножом — небольшое отличие

Пропорциональный делёж: общий случай

- Известно множество протоколов поиска пропорционального распределения.

Пропорциональный делёж: общий случай

- Известно множество протоколов поиска пропорционального распределения.
- Как протокол получает произвольную меру? Обычно рассматривают базовые запросы: оценки и разреза.

Пропорциональный делёж: общий случай

- Известно множество протоколов поиска пропорционального распределения.
- Как протокол получает произвольную меру? Обычно рассматривают базовые запросы: оценки и разреза.
 - Запрос оценки: какова ценность отрезка $[x, y]$?

Пропорциональный делёж: общий случай

- Известно множество протоколов поиска пропорционального распределения.
- Как протокол получает произвольную меру? Обычно рассматривают базовые запросы: оценки и разреза.
 - Запрос оценки: какова ценность отрезка $[x, y]$?
 - Запрос разреза: как разделить отрезок $[x, y]$ в пропорции $\alpha : (1 - \alpha)$?

Пропорциональный делёж: общий случай

- Известно множество протоколов поиска пропорционального распределения.
- Как протокол получает произвольную меру? Обычно рассматривают базовые запросы: оценки и разреза.
 - Запрос оценки: какова ценность отрезка $[x, y]$?
 - Запрос разреза: как разделить отрезок $[x, y]$ в пропорции $\alpha : (1 - \alpha)$?
- Другой подход: непрерывное время, или процедуры с движущимися ножами

Протоколы пропорционального дележа

- Для благ: протокол последнего уменьшающего

Протоколы пропорционального дележа

- Для благ: протокол последнего уменьшающего
- Для антиблаг: протокол последнего увеличивающего

Протоколы пропорционального дележа

- Для благ: протокол последнего уменьшающего
- Для антиблаг: протокол последнего увеличивающего
- Протокол с движущимся ножом (Дубинса–Спеньера)

Протоколы пропорционального дележа

- Для благ: протокол последнего уменьшающего
- Для антиблаг: протокол последнего увеличивающего
- Протокол с движущимся ножом (Дубинса–Спеньера)
- Некоторые методы могут не иметь аналогов

Делёж без зависти

Определение 2

Делёж является свободным от зависти, если каждый из агентов считает, что его доля не менее ценная, чем доля любого другого агента. Формально,

Определение 2

Делёж является свободным от зависти, если каждый из агентов считает, что его доля не менее ценная, чем доля любого другого агента. Формально,

$$\forall i \forall j \ v_i(S_i) \geq v_i(S_j).$$

Определение 2

Делёж является свободным от зависти, если каждый из агентов считает, что его доля не менее ценная, чем доля любого другого агента. Формально,

$$\forall i \forall j \ v_i(S_i) \geq v_i(S_j).$$

- Вариант для антиблаг:

$$\forall i \forall j \ c_i(S_i) \leq c_i(S_j).$$

Определение 2

Делёж является свободным от зависти, если каждый из агентов считает, что его доля не менее ценная, чем доля любого другого агента. Формально,

$$\forall i \forall j \ v_i(S_i) \geq v_i(S_j).$$

- Вариант для антиблаг:

$$\forall i \forall j \ c_i(S_i) \leq c_i(S_j).$$

- Из отсутствия зависти следует пропорциональность, но не наоборот (т.к. среднее не больше максимума и не меньше минимума).

Делёж без зависти на троих

- Протокол Селфриджа–Конвея (1960; не опубликован): 5 разрезов

Делёж без зависти на троих

- Протокол Селфриджа–Конвея (1960; не опубликован): 5 разрезов
- Требуется уменьшать кусок пирога, чтобы сравнять его с другим

Делёж без зависти на троих

- Протокол Селфриджа–Конвея (1960; не опубликован): 5 разрезов
- Требуется уменьшать кусок пирога, чтобы сравнять его с другим
- Именно этот момент не работает с антиблагами! Если уменьшать второй кусок, то он станет лучше, а не хуже. А для увеличения первого куска нет лишнего пирога.

Делёж без зависти на троих

- Протокол Селфриджа–Конвея (1960; не опубликован): 5 разрезов
- Требуется уменьшать кусок пирога, чтобы сравнять его с другим
- Именно этот момент не работает с антиблагами! Если уменьшать второй кусок, то он станет лучше, а не хуже. А для увеличения первого куска нет лишнего пирога.
- Но есть протокол Оскуи (1998; тоже не опубликован!) с 9 разрезами

Делёж без зависти на четверых

- Протокол Брамса–Тэйлора-Цвиккера (1996): процедура с движущимися ножами

Делёж без зависти на четверых

- Протокол Брамса–Тэйлора-Цвиккера (1996): процедура с движущимися ножами
- Аналог для антиблаг: протокол Петерсона–Су (2002)

Делёж без зависти на четверых

- Протокол Брамса–Тэйлора-Цвиккера (1996): процедура с движущимися ножами
- Аналог для антиблаг: протокол Петерсона–Су (2002)
- Протокол Азиза–Маккензи (2015): первый конечный протокол, 203 разреза

Делёж без зависти на четверых

- Протокол Брамса–Тэйлора-Цвиккера (1996): процедура с движущимися ножами
- Аналог для антиблаг: протокол Петерсона–Су (2002)
- Протокол Азиза–Маккензи (2015): первый конечный протокол, 203 разреза
- Протокол Аманатидиса и др. (2018): 61 разрез

Делёж без зависти на четверых

- Протокол Брамса–Тэйлора-Цвиккера (1996): процедура с движущимися ножами
- Аналог для антиблаг: протокол Петерсона–Су (2002)
- Протокол Азиза–Маккензи (2015): первый конечный протокол, 203 разреза
- Протокол Аманатидиса и др. (2018): 61 разрез
- Небольшое улучшение Г. Соколова (2019, не опубликовано): 55 разрезов

Делёж без зависти на четверых

- Протокол Брамса–Тэйлора–Цвиккера (1996): процедура с движущимися ножами
- Аналог для антиблаг: протокол Петерсона–Су (2002)
- Протокол Азиза–Маккензи (2015): первый конечный протокол, 203 разреза
- Протокол Аманатидиса и др. (2018): 61 разрез
- Небольшое улучшение Г. Соколова (2019, не опубликовано): 55 разрезов
- Для антиблаг: только общий протокол для N участников (см. ниже)

Делёж без зависти на N агентов

- Теорема существования (теорема Симмонса–Су): всегда существует делёж без зависти на связные отрезки

Делёж без зависти на N агентов

- Теорема существования (теорема Симмонса–Су): всегда существует делёж без зависти на связные отрезки
- Бесконечные протоколы: дают результат только в пределе.

Делёж без зависти на N агентов

- Теорема существования (теорема Симмонса–Су): всегда существует делёж без зависти на связные отрезки
- Бесконечные протоколы: дают результат только в пределе.
- Конечные неограниченные протоколы — процедура точно закончится, но нет никакой верхней оценки на число шагов:
 - Протокол Брамса–Тэйлора (1995)
 - Протокол Робертсона–Уэбба (1997)
 - Протокол Пихурко (2000)

Делёж без зависти на N агентов

- Теорема существования (теорема Симмонса–Су): всегда существует делёж без зависти на связные отрезки
- Бесконечные протоколы: дают результат только в пределе.
- Конечные неограниченные протоколы — процедура точно закончится, но нет никакой верхней оценки на число шагов:
 - Протокол Брамса–Тэйлора (1995)
 - Протокол Робертсона–Уэбба (1997)
 - Протокол Пихурко (2000)
 - Для антиблаг: протокол Петерсона–Су (2009)

Делёж без зависти на N агентов, конечные протоколы

- Общий протокол Азиза–Маккензи (2016): число разрезов

Делёж без зависти на N агентов, конечные протоколы

- Общий протокол Азиза–Маккензи (2016): число разрезов $N^{N^{N^{N^{N^N}}}}$

Делёж без зависти на N агентов, конечные протоколы

- Общий протокол Азиза–Маккензи (2016): число разрезов $N^{N^{N^{N^N}}}$
- Они же в заявлении для прессы: достаточно N^{N^N} разрезов

Делёж без зависти на N агентов, конечные протоколы

- Общий протокол Азиза–Маккензи (2016): число разрезов $N^{N^{N^{N^N}}}$
- Они же в заявлении для прессы: достаточно N^{N^N} разрезов
- Г. Соколов (2020, сейчас готовится к публикации): проверена оценка N^{N^N} для старого алгоритма, придумана модификация с оценкой $N^{O(N^2)}$

Делёж без зависти на N агентов, конечные протоколы

- Общий протокол Азиза–Маккензи (2016): число разрезов $N^{N^{N^{N^N}}}$
- Они же в заявлении для прессы: достаточно N^{N^N} разрезов
- Г. Соколов (2020, сейчас готовится к публикации): проверена оценка N^{N^N} для старого алгоритма, придумана модификация с оценкой $N^{O(N^2)}$
- Для антиблаг: протокол Дехгани и др. (2018), число разрезов N^{N^N}

Делёж без зависти на N агентов, конечные протоколы

- Общий протокол Азиза–Маккензи (2016): число разрезов $N^{N^{N^{N^N}}}$
- Они же в заявлении для прессы: достаточно N^{N^N} разрезов
- Г. Соколов (2020, сейчас готовится к публикации): проверена оценка N^{N^N} для старого алгоритма, придумана модификация с оценкой $N^{O(N^2)}$
- Для антиблаг: протокол Дехгани и др. (2018), число разрезов N^{N^N}
- Наши планы: попробовать уменьшить число шагов до экспоненциального и здесь

Различные дискретные постановки

- Стандартная дискретная постановка: отдельные объекты, оценки каждого из них

Различные дискретные постановки

- Стандартная дискретная постановка: отдельные объекты, оценки каждого из них
- Пропорциональность и отсутствие зависти недостижимы из-за целочисленных эффектов

Различные дискретные постановки

- Стандартная дискретная постановка: отдельные объекты, оценки каждого из них
- Пропорциональность и отсутствие зависти недостижимы из-за целочисленных эффектов
- Рассматриваются релаксации, например, EF1 — отсутствие зависти с точностью до одного объекта

Различные дискретные постановки

- Стандартная дискретная постановка: отдельные объекты, оценки каждого из них
- Пропорциональность и отсутствие зависти недостижимы из-за целочисленных эффектов
- Рассматриваются релаксации, например, EF1 — отсутствие зависти с точностью до одного объекта
- Постановка с дележом графа: объекты образуют граф, каждый участник должен получить связный кусок

Общая сводка основных результатов

Milestone	Goods division	Chore division
Cake-cutting (divisible objects)		
Problem statement	Steinhaus (1948)	Gardner (1978), book <i>Aha! Insight</i>
EF protocol for 3 agents	Selfridge (1960, unpublished) and independently Conway	Oskui (1998, unpublished)
Unbounded EF protocol for n agents	Brams–Taylor (1995)	Peterson–Su (2009)
Bounded EF protocol for n agents	Aziz–Mackenzie (2016)	Dehghani et al (2018)
Indivisible objects		
Introduction of EF	Foley (1967)	explicitly in Aziz (2016)
NP-hardness of EF	Lipton et al (2004)	Bouveret–Cechlárová–Lesca (2018)
Introduction of EF1	Budish (2011)	Aziz et al (2018)
Existence of EF1	Caragiannis et al (2016)	Bhaskar–Sricharan–Vaish (2020)
Objects form a graph	Bouveret et al (2017)	Bouveret–Cechlárová–Lesca (2018)

Делёж графа без зависти: основные результаты

Теорема 3 (Bouveret et al, 2017)

Существует ли делёж без зависти — NP-полная задача даже для пути или звезды.

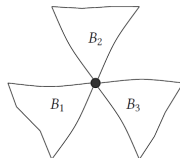
Теорема 4 (Bilò et al, 2018)

Для любого числа агентов всегда существует EF2-разделение для пути.

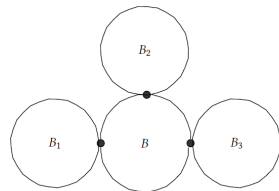
Теорема 5 (Bilò et al, 2018)

Для 2 агентов существует EF1-разделение тогда и только тогда, когда блочный граф является путём.

Когда блочный граф — не путь:



(a) A cut vertex adjacent to three blocks



(b) A block adjacent to three cut vertices

Теорема 6 (Bouveret–Cechlárová–Lesca, 2018)

Проверка существования дележа графа обязанностей без зависти — NP -полная задача, даже если граф является путём или звездой (для произвольного числа агентов).

Задача также NP -полна для 2 агентов и двудольных графов.

Our contribution

- We address the question of EF1 division of chore graphs.
- Intuition: the greater the number of agents the more chances that an EF1 division exists (if $n \geq m$, then it definitely exists)
- We narrow our attention to the class of trees, but consider various numbers of agents
- Our main results (informally):
 - **Inexistence results:** for any tree other than a path, if n is between 2 and some value $\approx \frac{m}{2}$, no EF1 chore division may exist even if all cost functions are the same.
 - **Existence results:** if $n = m - 1$, then an EF1 chore division always exists. If $n = m - 2$, then an EF1 chore division always exists iff no two leaves share a neighbor.
- The inexistence theorems remain true even if we consider EF1 not up to one *outer* chore, but up to one *arbitrary* chore. Under this change the theorems become stronger.

- [1] H. Aziz and S. Mackenzie. “A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for any number of agents”. In: *2016 IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*. IEEE. 2016, pp. 416–427.
- [2] U. Bhaskar, A. R. Sricharan, and R. Vaish. “On Approximate Envy-Freeness for Indivisible Chores and Mixed Resources”. In: *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques, APPROX/RANDOM 2021*. Ed. by M. Wootters and L. Sanità. Vol. 207. LIPIcs. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021, 1:1–1:23.
- [3] V. Bilò, I. Caragiannis, M. Flammini, A. Igarashi, G. Monaco, D. Peters, C. Vinci, and W. S. Zwicker. “Almost envy-free allocations with connected bundles”. In: *Games and Economic Behavior* 131 (2022), pp. 197–221.
- [4] S. Bouveret, K. Cechlárová, E. Elkind, A. Igarashi, and D. Peters. “Fair division of a graph”. In: *Proceedings of the 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 2017, pp. 135–141.

- [5] S. Bouveret, K. Cechlárová, and J. Lesca. “Chore division on a graph”. In: *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* 33 (2019), pp. 540–563.
- [6] E. Budish. “The combinatorial assignment problem: Approximate competitive equilibrium from equal incomes”. In: *Journal of Political Economy* 119.6 (2011), pp. 1061–1103.
- [7] I. Caragiannis, D. Kurokawa, H. Moulin, A. D. Procaccia, N. Shah, and J. Wang. “The unreasonable fairness of maximum Nash welfare”. In: *Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation*. ACM. 2016, pp. 305–322.
- [8] S. Dehghani, A. Farhadi, M. HajiAghayi, and H. Yami. “Envy-free chore division for an arbitrary number of agents”. In: *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM. 2018, pp. 2564–2583.

Спасибо!

`mailto:musatych@gmail.com`