



МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕНСОРОВ И АКТУАТОРОВ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Андрей Наседкин,

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

nasedkin@math.sfedu.ru,

andrey.nasedkin@gmail.com

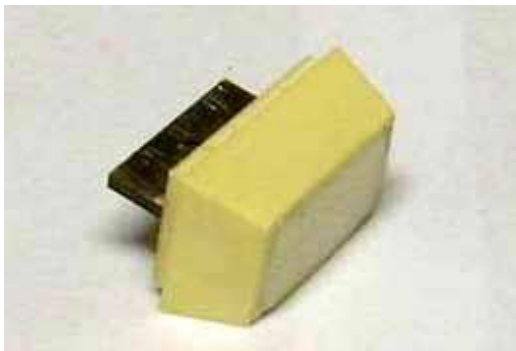
Содержание

- Введение. Пьезоэлектрические устройства
- Конечно-элементная техника
- Моделирование пористых и других типов пьезоэлектрических композитов
- Конечно-элементное моделирование представительных объемов и вычисление эффективных модулей пьезоэлектрических композитов
- Установившиеся колебания и модальный анализ. Частоты электрических резонансов и антирезонансов
- Некоторые численные результаты для различных пьезоэлектрических устройств
- Заключение

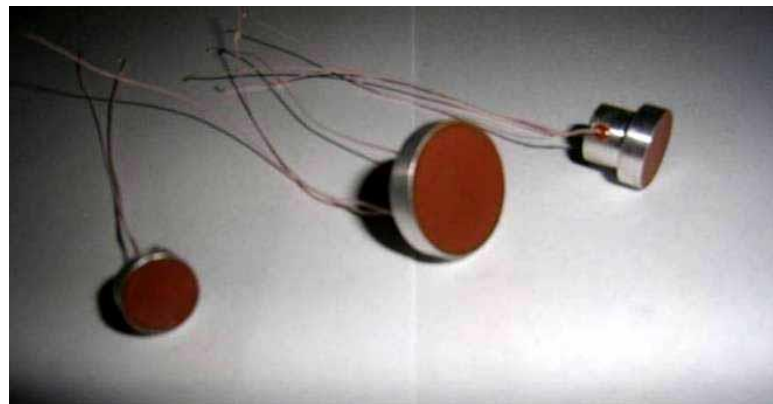
Некоторые свойства пьезокомпозитных материалов

- **Пьезоэлектрические материалы являются материалами со связанностью механических и электрических полей**
- **(Пьезоэлектричество = Электроупругость)**
- **Пьезоэлектрические материалы являются анизотропными с большим числом материальными модулями**
- **В задачах гомогенизации для пьезоэлектрических композитов требуется решать набор краевых задач электроупругости с различными граничными условиями**
- **В пьезоэлектрических композитах в пьезокерамической матрице поле поляризации не является постоянным**

Пьезопреобразователи для медицинской техники



**16-ти элементный модуль
фазовой решетки**

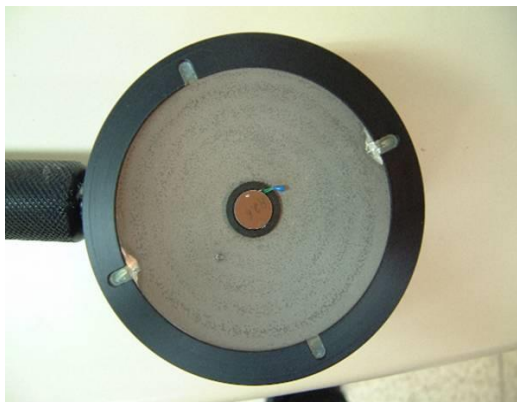


**Элементы для механических секторных
сканеров**



Подошва линейного 64-элементного преобразователя

Экстракорпоральный литотриптор



**Фокусирующий пьезопреобразователь
(сфера 95 мм, $R = 45$ мм)**

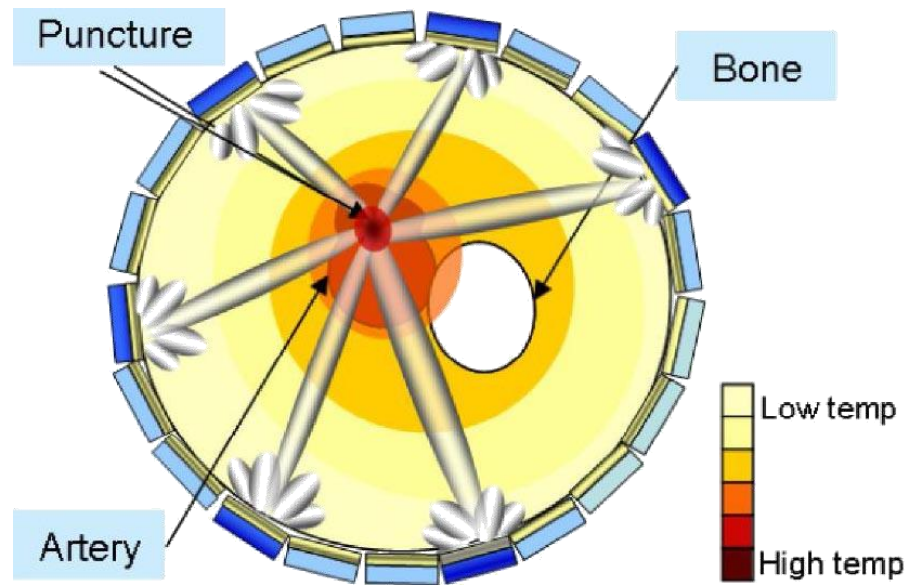


Излучатель силовой антенной решетки

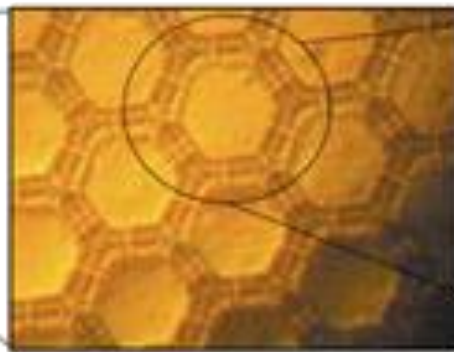


**Экстракорпоральный литотриптор с
фокусирующей многоэлектродной
силовой антенной решеткой**

Ультразвуковая коагуляция (США)



Массив из тысяч кремниевых ячеек



Увеличенное изображение манжеты



А. Гибкая мембрана с электродом
Б. Вакуумная полость

Автоматическое устройство остановки кровотечения

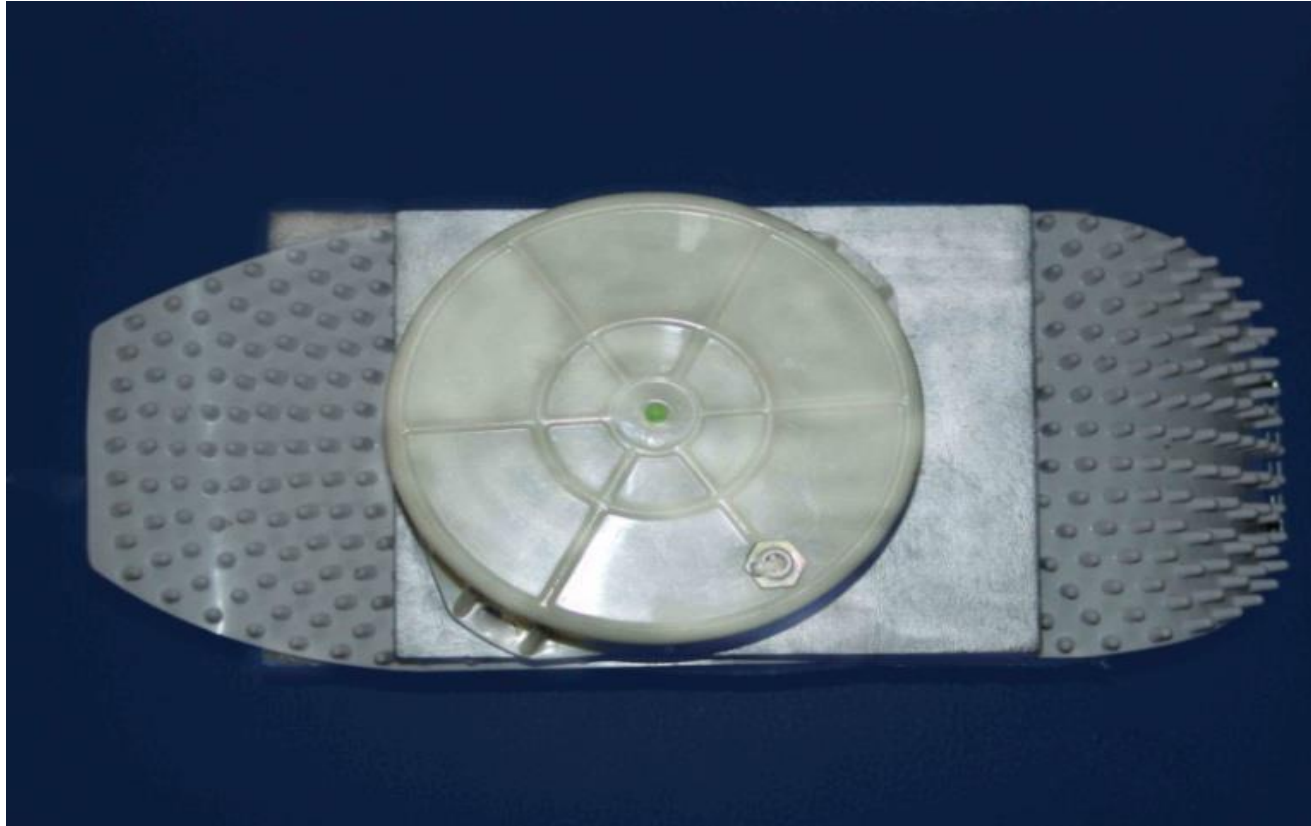


Частота ранений магистральных кровеносных сосудов (%)

Вторая мировая война (артерии)	Афганистан (артерии)	Чечня (артерии)	Локальные войны (всего сосудов)
0,95	2,7	3-5	6-8

Своевременная и качественная остановка кровотечения в полевых условиях без развития осложнений (тромбозов, инфицирование и т.д.)

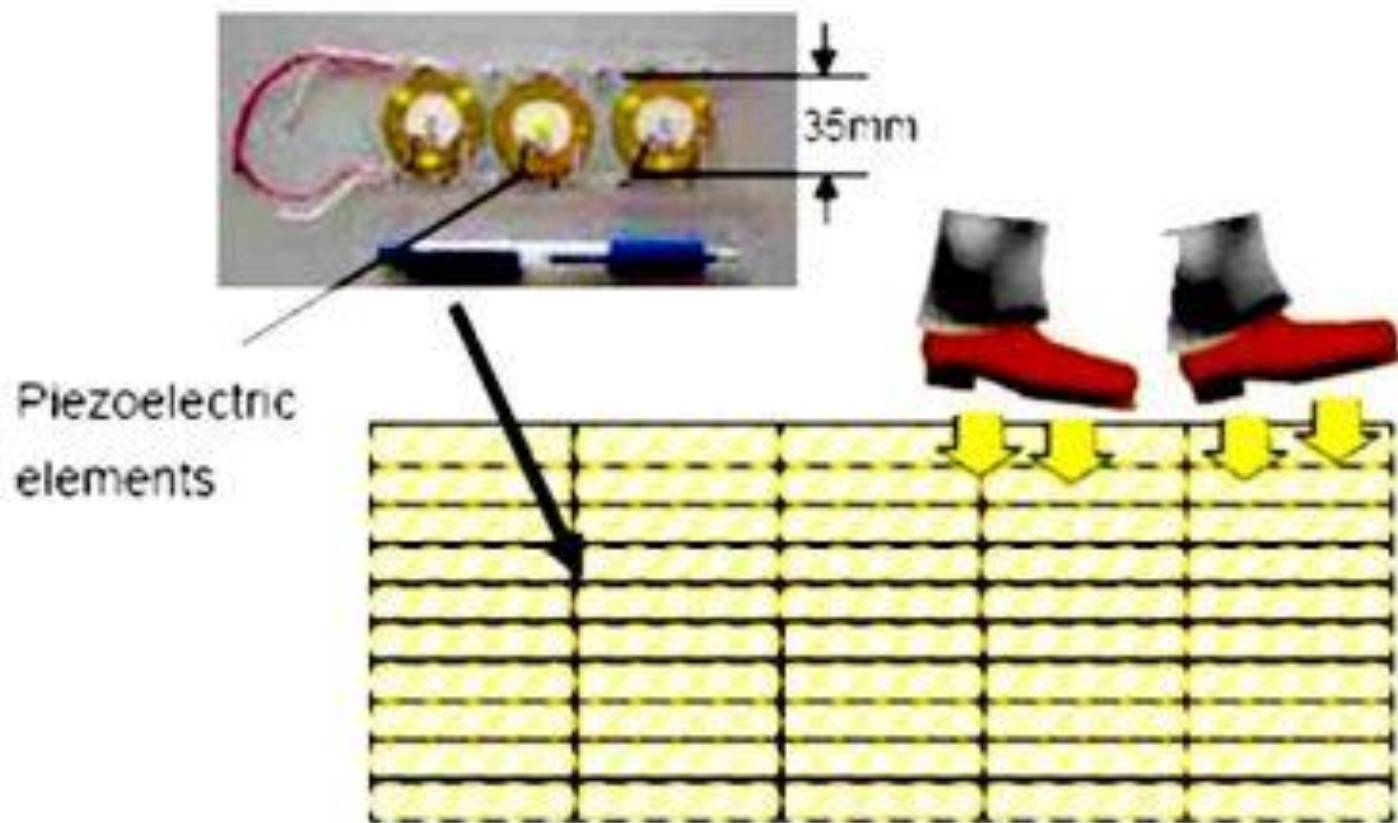
Пример пьезоэлектрического генератора



Input: Force ~ 10 N;
Frequency ~ 30 Hz

Output: Electric voltage ~ 60 V;
Power ~ 5 mW

Экспериментальная система накопителей энергии на основе пьезогенераторов, вмонтированных в настил пола на входе в станции метро Marunouchi (Токио)



Возможные источники накопления энергии

- естественные и техногенные вибрации;
- движение транспорта;
- волновые движения в различных средах;
- тротуары, автомобильные дороги, железные дороги и т. д.



Пьезоэлектрические материалы

Четыре эквивалентные формы определяющих соотношений

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E} \quad (1)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^E \cdot \mathbf{T} + \mathbf{d}^* \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^E \cdot \mathbf{T} + \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{D}; \quad \mathbf{E} = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{D} \quad (3)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{D}; \quad \mathbf{E} = -\mathbf{h} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\beta}^S \cdot \mathbf{D} \quad (4)$$

$$\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$$

$$\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}$$

Математические модели для пьезоэлектрического анализа

Пьезоэлектрические среды $\Omega_j = \Omega_{pk}$

$$\rho_{pj} \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj} \rho_j \dot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^E \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\mathbf{D} + \zeta_d \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{e}_j \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \zeta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \boldsymbol{\varepsilon}_j^S \cdot \mathbf{E} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) / 2; \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (4)$$

Поскольку скорость электромагнитных волн на пять порядков превышает скорость акустических волн, можно предполагать, что электромагнитные сигналы распространяются мгновенно по сравнению с акустическими.

Упругие среды $\Omega_j = \Omega_{em}$

$$\rho_{pk} \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj} \rho_j \dot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}); \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) / 2 \quad (2)$$

Акустические среды $\Omega_j = \Omega_{al}$

$$\frac{1}{\rho_j c_j^2} \dot{p} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v} = \nabla \psi \quad (3)$$

$$\rho_j \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + b_j \nabla \mathbf{v} \quad (4)$$

в ANSYS: $\beta_j = 0$, p - неизвестная функция

Конечно-элементные аппроксимации

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_u^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t) ; \quad \varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_\varphi^T(\mathbf{x}) \cdot \Phi(t) ; \quad (1)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_\psi^T(\mathbf{x}) \cdot \Psi(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} ; \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 & \tilde{\mathbf{R}}_{u\psi} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{R}}_{u\psi}^T & 0 & -\mathbf{M}_{\psi\psi} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 & \mathbf{R}_{u\psi} \\ \zeta_d \mathbf{K}_{u\varphi}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{u\psi}^T & 0 & -\mathbf{C}_{\psi\psi} \end{pmatrix}$$

Конечно-элементные аппроксимации

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} & 0 \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{K}_{\psi\psi} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_u, \mathbf{F}_\varphi + \zeta_d \dot{\mathbf{F}}_\varphi, 0]^T$$

$$\mathbf{a} = [\mathbf{U}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}]^T$$

Комплекс седловых алгоритмов. (Нестационарные задачи)

Метод Ньюмарка в альтернативной формулировке

$$Y_j \mathbf{b} = \sum_{k=0}^2 \beta_k \mathbf{b}_{j+1-k}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{a}, \mathbf{F}_u, \mathbf{F}_\varphi \quad (1)$$

$$Y_j \dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{\tau} (\gamma \mathbf{a}_{j+1} - (2\gamma - 1) \mathbf{a}_j - (1 - \gamma) \mathbf{a}_{j-1}) \quad (2)$$

$$Y_j \ddot{\mathbf{a}} = \frac{1}{\tau^2} (\mathbf{a}_{j+1} - 2\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_{j-1}) \quad (3)$$

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{b}(t_j); \quad \beta_0 = \beta; \quad \beta_1 = \gamma_1 - 2\beta; \quad \beta_2 = \gamma_2 + \beta \quad (4)$$

$$\gamma_1 = 1/2 + \gamma; \quad \gamma_2 = 1/2 - \gamma; \quad 4\beta \geq (1/2 + \gamma)^2; \quad \gamma \geq 1/2$$

Комплекс седловых алгоритмов. (Нестационарные задачи)

$$\mathbf{K}^{eff} \cdot \mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{F}^{eff} (Y_j \mathbf{F}_u, Y_j \mathbf{F}_\varphi, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j-1}) \quad (5)$$

$$\mathbf{K}^{eff} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{eff} & \mathbf{K}_{u\varphi} & \mathbf{K}_{u\psi}^{eff} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{eff} & 0 \\ \mathbf{K}_{u\psi}^{eff T} & 0 & -\mathbf{K}_{\psi\psi}^{eff} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{\eta\eta}^{eff} = \frac{1}{\beta\tau^2} \mathbf{M}_{\eta\eta} + \frac{\gamma}{\beta\tau} \mathbf{C}_{\eta\eta} + \mathbf{K}_{\eta\eta}; \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{\eta\eta}^{eff} = \frac{1}{\beta\tau^2} \tilde{\mathbf{R}}_{u\psi} + \frac{\gamma}{\beta\tau} \mathbf{R}_{u\psi}; \quad \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{eff} = (1 + \frac{\zeta_d \gamma}{\beta\tau})^{-1} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \quad (8)$$

Комплекс седловых алгоритмов. (Установившиеся колебания)

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \exp(j\omega t) \quad (1)$$

$$\mathbf{K}_c \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{F}}_c ; \quad \tilde{\mathbf{F}}_c = [\tilde{\mathbf{F}}_u, \tilde{\mathbf{F}}_\varphi, 0]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{K}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uuc} & \mathbf{K}_{u\varphi} & \mathbf{K}_{u\psi c} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi c} & 0 \\ \mathbf{K}_{u\psi c}^T & 0 & -\mathbf{K}_{\psi\psi c} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{K}_{\eta\eta c} = -\omega^2 \mathbf{M}_{\eta\eta} + i\omega \mathbf{C}_{\eta\eta} + \mathbf{K}_{\eta\eta}; \quad \eta = u, \psi$$

$$\mathbf{K}_{u\psi c} = -\omega^2 \tilde{\mathbf{R}}_{u\psi} + i\omega \mathbf{R}_{u\psi}$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi c} = (1 + i\omega\zeta_d)^{-1} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}$$

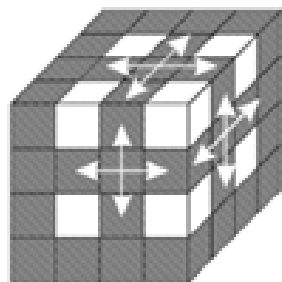
Статические задачи

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U} , \quad \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\varphi^T \cdot \mathbf{\Phi} \quad (1)$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Phi} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

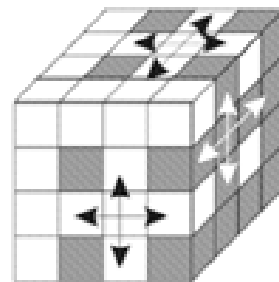
Основные типы связности (по R.E. Newnham) и микроструктура пористой пьезокерамики



3-0



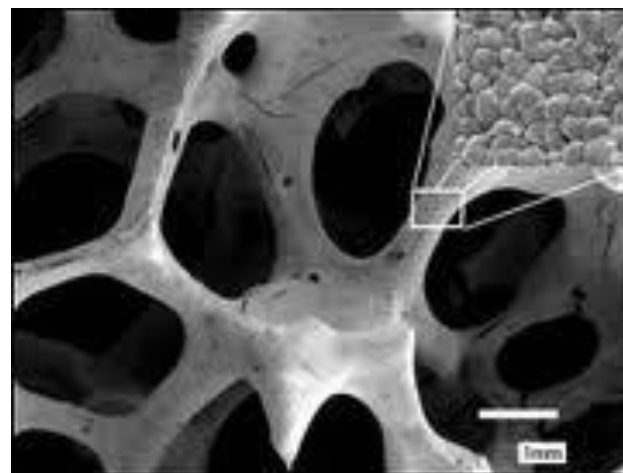
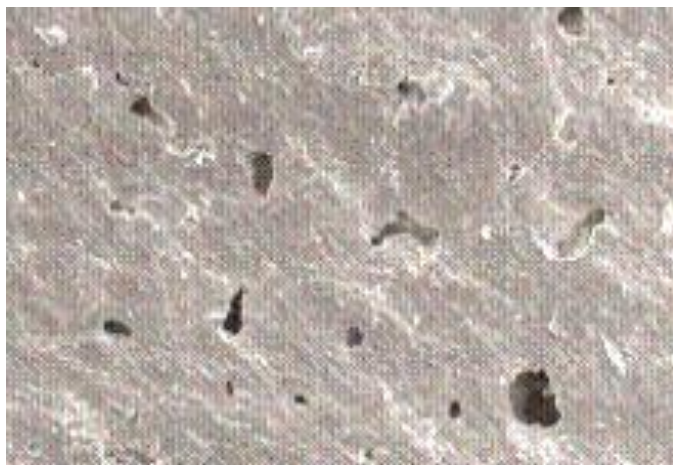
Пьезокерамика



3-3

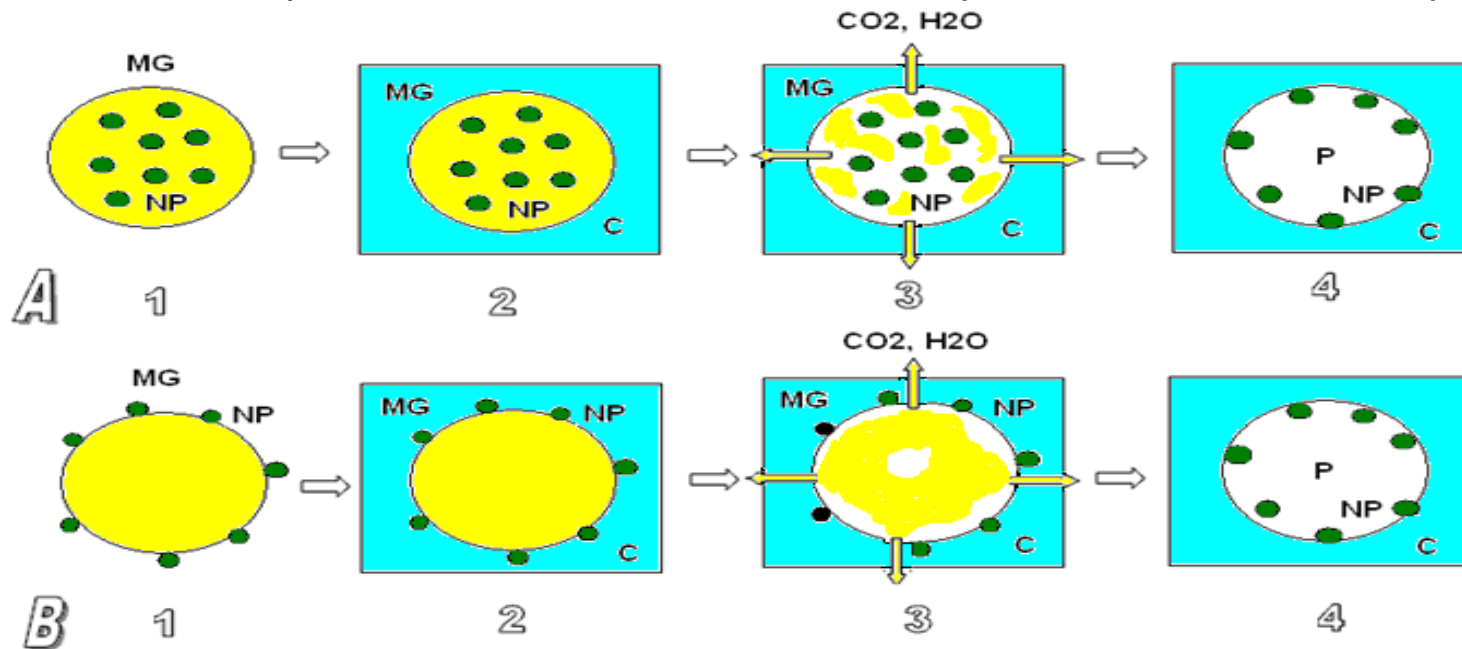


Поры



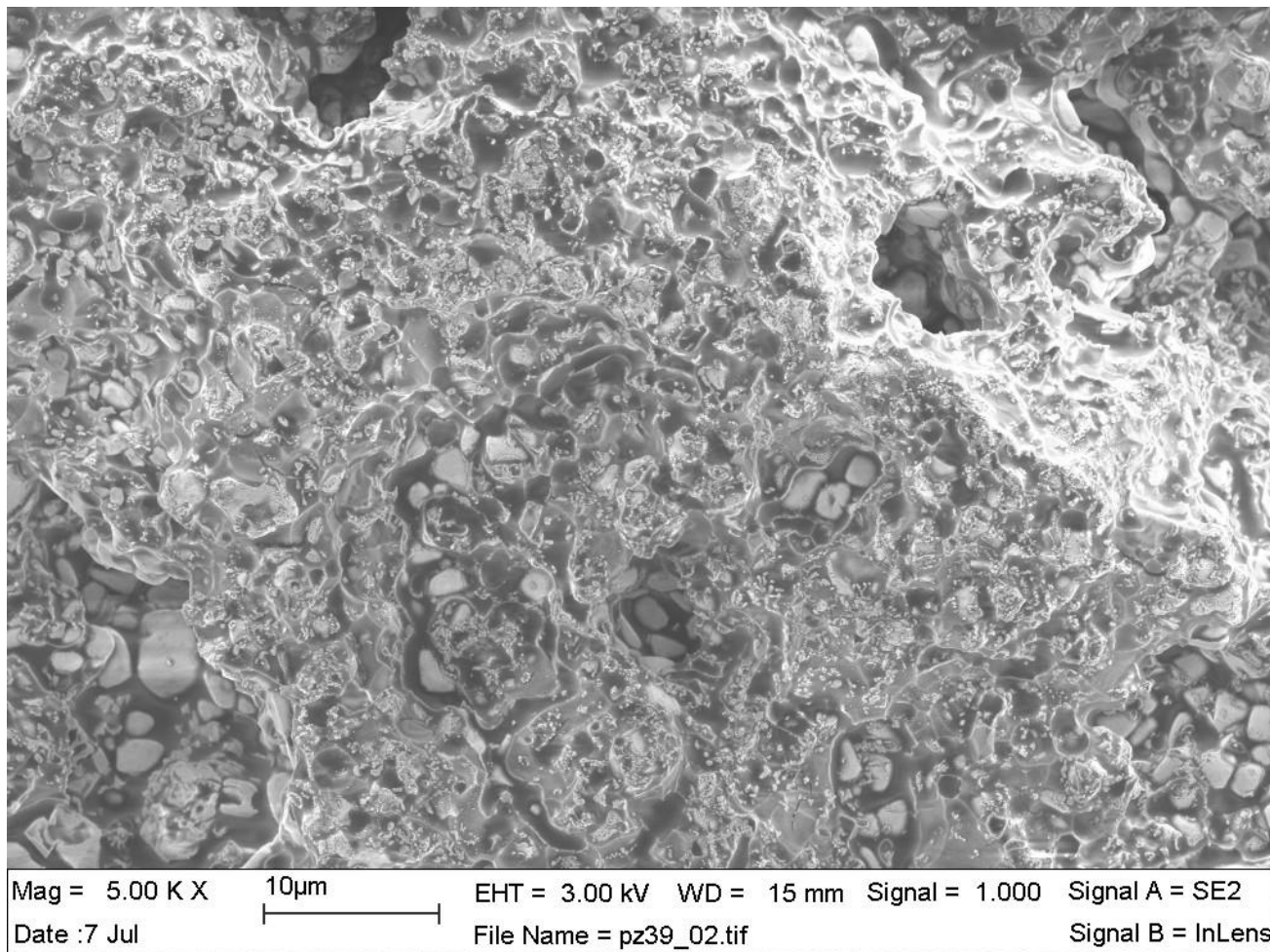
Технология получения микропористых пьезокерамيك и керамоматричных композитов с использованием микрогранул, наполненных (А) или покрытых (В) наночастицами веществ

(*Rybyanets A.N., Naumenko A.A.: Nanoparticles transport in ceramic matrixes: a novel approach for ceramic matrix composites fabrication. Journal of Modern Physics. 2013; 4: 1041-1049.*)

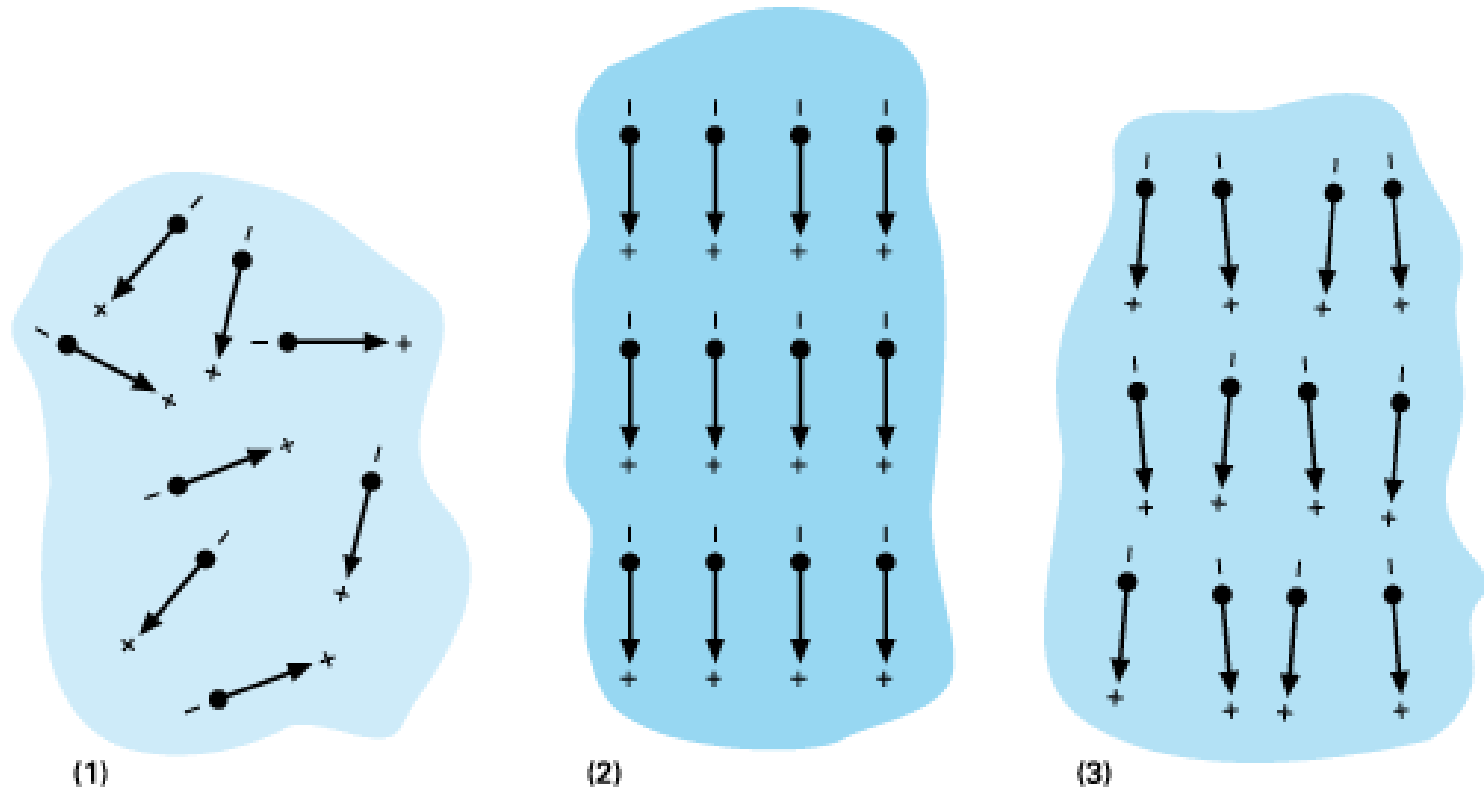


- 1 - получение микрогранул (MG) наполненных (А) и покрытых (В) наночастицами веществ (NP);
- 2 - введение микрогранул (MG) в керамическую матрицу (С) посредством смешивания и прессования;
- 3 - выжигание (термическое разложение полимера) микрогранул (MG) с распределением наночастиц (NP) по поверхности пор ;
- 4 - спекание пористой (P) керамической матрицы с покрытием внутренней поверхности пор нанослоем металлов, локальным легированием или изменением стехиометрического состава контактного слоя пьезокерамики (С).

Микрофотография (SEM) поверхности поры в пьезокерамике ЦТС, покрытой металлическим никелем (степень покрытия 90%)

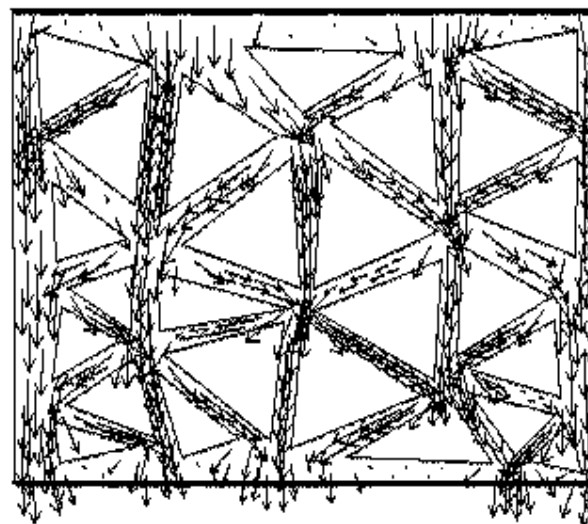
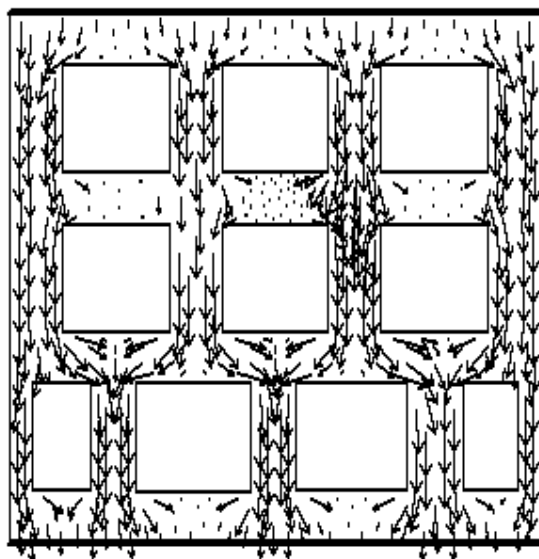
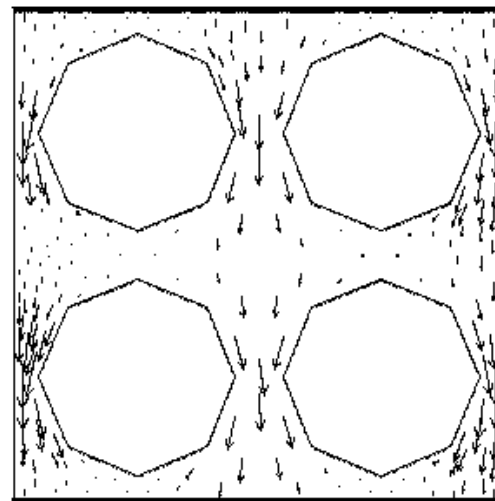
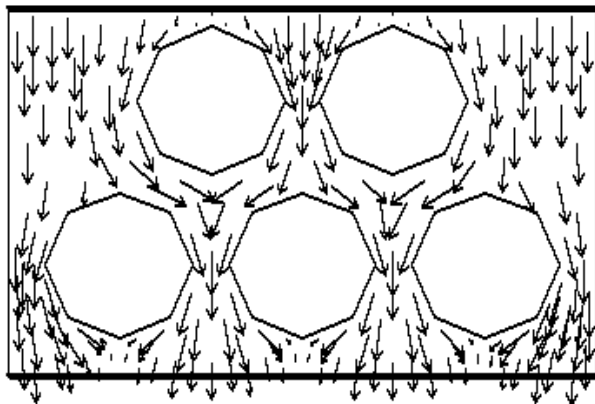


Поляризация пьезокерамики



- (1) Неполяризованная пьезокерамика со случайной ориентацией диполей
- (2) Во время поляризации при приложении электрического поля
- (3) После поляризации. Остаточная поляризация

Неоднородная поляризация вокруг пор



Моделирование неоднородной поляризации

1) Решаем электростатическую задачу для представительного объема при приложении электрического поля

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_i \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\varphi = LE_*, \quad x_3 = 0; \quad \varphi = 0, \quad x_3 = L$$

2) Для каждого конечного элемента Ω^{em} определяем направление вектора поляризации

$$\mathbf{P}^{em} = \mathbf{D}^{em} - \varepsilon_0 \mathbf{E}^{em}$$

Моделирование неоднородной поляризации

3) Ассоциируем с каждым КЭ Ω^{em} свою элементную систему координат

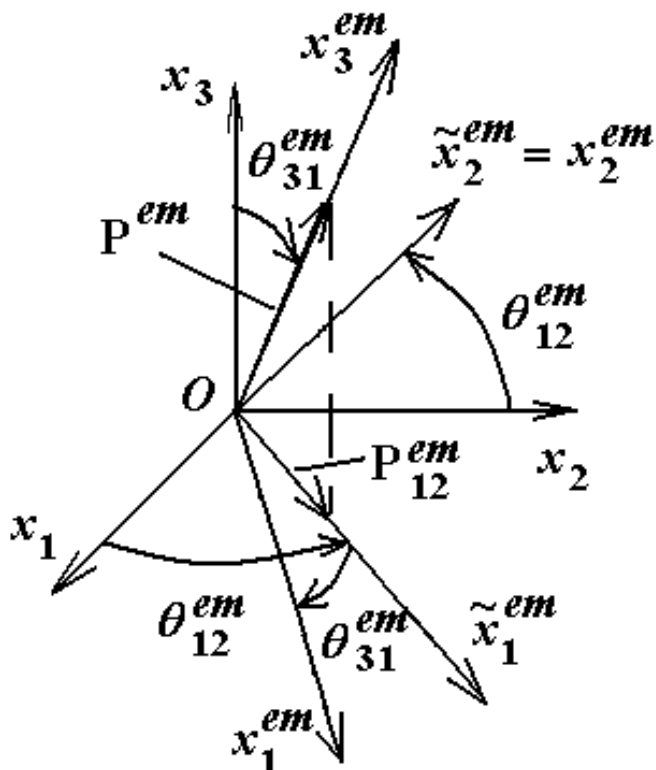
$$Ox_1^{em} x_2^{em} x_3^{em}$$

4) Изменяем материальные модули

$$\mathbf{c}^E, \mathbf{e}, \mathbf{\epsilon}^S$$

по закону преобразования тензорных величин при поворотах элементных систем координат

$$\mathbf{c}_p^{Eem}, \mathbf{e}_p^{em}, \mathbf{\epsilon}_p^{Sem}$$



Две модели неоднородной поляризации

$\mathbf{c}^E \mathbf{e} \varepsilon^S$ - модель

$$\mathbf{c}^{Eem} = (1 - k_p^{em}) \mathbf{c}_i^E + k_p^{em} \mathbf{c}_p^{Eem}$$

$$\mathbf{e}^{em} = k_p^{em} \mathbf{e}_p^{em}$$

$$\varepsilon^{Sem} = (1 - k_p^{em}) \varepsilon_i^S + k_p^{em} \varepsilon_p^{Sem}$$

$$k_p^{em} = |\mathbf{P}^{em}| / p_{sat}$$

$$p_{sat} = (\varepsilon_i - \varepsilon_0) / E_*$$

$\mathbf{s}^E \mathbf{d} \varepsilon^T$ - модель

$$\mathbf{s}^{Eem} = (1 - k_p^{em}) \mathbf{s}_i^E + k_p^{em} \mathbf{s}_p^{Eem}$$

$$\mathbf{d}^{em} = k_p^{em} \mathbf{d}_p^{em}$$

$$\varepsilon^{Tem} = (1 - k_p^{em}) \varepsilon_i^T + k_p^{em} \varepsilon_p^{Tem}$$

Материальные модули пьезоэлектрического тела в матричной форме

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E \\ & & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E \\ & & & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E \\ & \text{sym} & & & c_{55}^E & c_{56}^E \\ & & & & & c_{66}^E \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\kappa} = \mathbf{\varepsilon}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}$$

or

$$\mathbf{\kappa} = \mathbf{\varepsilon}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{13}^S \\ & \varepsilon_{22}^S & \varepsilon_{23}^S \\ \text{sym} & & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}$$

Материальные модули пьезокерамики (кристаллографический класс 6mm)

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix}$$

$$c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E) / 2$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\kappa} = \mathbf{\epsilon}^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix}$$

10 различных модулей: 5 упругих жесткостей, 3 пьезомодуля,
2 диэлектрические проницаемости

Метод эффективных модулей для пъезокомпозитов

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\
 \mathbf{T} &= \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}; & \mathbf{D} &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} - \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E} \\
 \mathbf{S} &= \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}; & \mathbf{E} &= -\nabla \varphi; & \mathbf{L}^*(\nabla) &= \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{L}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_0|_{\Gamma}; & \varphi &= -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0|_{\Gamma};
 \end{aligned}$$

Для обычной пористой пьезокерамики на границе раздела пор и матрицы должны выполняться следующие граничные условия: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$; $\mathbf{x} \in \Gamma_{pi}$

Но в задаче с полной металлизацией поверхности пор необходимо использовать условия с очень высокими диэлектрическими проницаемостями в проводящем слое

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^I &= \mathbf{u}^{II}, & \mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T}^I &= \mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T}^{II}, & \mathbf{x} &\in \Gamma_{pi} \\
 \varphi^I &= \varphi^{II}, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^I &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{II}, & \mathbf{x} &\in \Gamma_{pi}
 \end{aligned}$$

Nasedkin A., Nassar M.E. About anomalous properties of porous piezoceramic materials with metalized or rigid surfaces of pores. *Mechanics of Materials*. **2021**; 162: 104040. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.104040.

Пять задач для определения полного набора модулей пьезокерамики

$$1. \quad \varepsilon_{011} \neq 0 \Rightarrow \quad c_{11}^{E \text{ eff}} = \langle \sigma_{11} \rangle / \varepsilon_{011}; \quad c_{12}^{E \text{ eff}} = \langle \sigma_{22} \rangle / \varepsilon_{011}$$

$$c_{13}^{E \text{ eff}} = \langle \sigma_{33} \rangle / \varepsilon_{011}; \quad e_{31}^{\text{eff}} = \langle D_3 \rangle / \varepsilon_{011}$$

$$2. \quad \varepsilon_{033} \neq 0 \Rightarrow \quad c_{33}^{E \text{ eff}} = \langle \sigma_{33} \rangle / \varepsilon_{033}; \quad e_{33}^{\text{eff}} = \langle D_3 \rangle / \varepsilon_{033}$$
$$c_{13}^{E \text{ eff}} = \langle \sigma_{11} \rangle / \varepsilon_{033} = \langle \sigma_{22} \rangle / \varepsilon_{033}$$

$$3. \quad \varepsilon_{023} \neq 0 \Rightarrow \quad c_{44}^{E \text{ eff}} = \langle \sigma_{33} \rangle / (2\varepsilon_{023}); \quad e_{15}^{\text{eff}} = \langle D_2 \rangle / (2\varepsilon_{023})$$

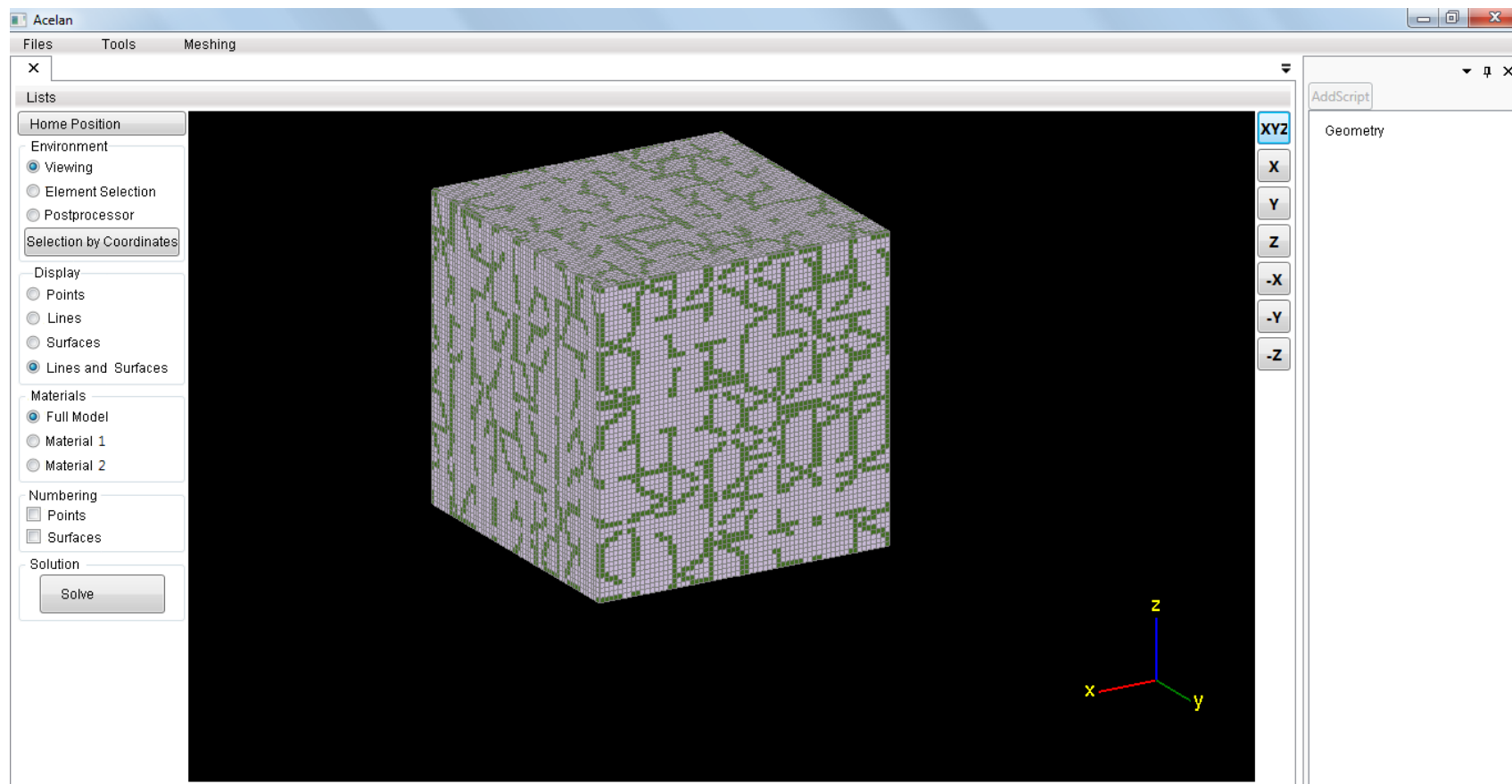
$$4. \quad E_{01} \neq 0 \Rightarrow \quad e_{15}^{\text{eff}} = -\langle \sigma_{13} \rangle / E_{01}; \quad \varepsilon_{11}^{S \text{ eff}} = \langle D_1 \rangle / E_{01}$$

$$5. \quad E_{03} \neq 0 \Rightarrow \quad e_{31}^{\text{eff}} = -\langle \sigma_{11} \rangle / E_{03} = -\langle \sigma_{22} \rangle / E_{03}$$
$$e_{33}^{\text{eff}} = -\langle \sigma_{33} \rangle / E_{03}; \quad \varepsilon_{33}^{S \text{ eff}} = \langle D_3 \rangle / E_{03}$$

**Осредненные
величины:**

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\dots) d\Omega$$

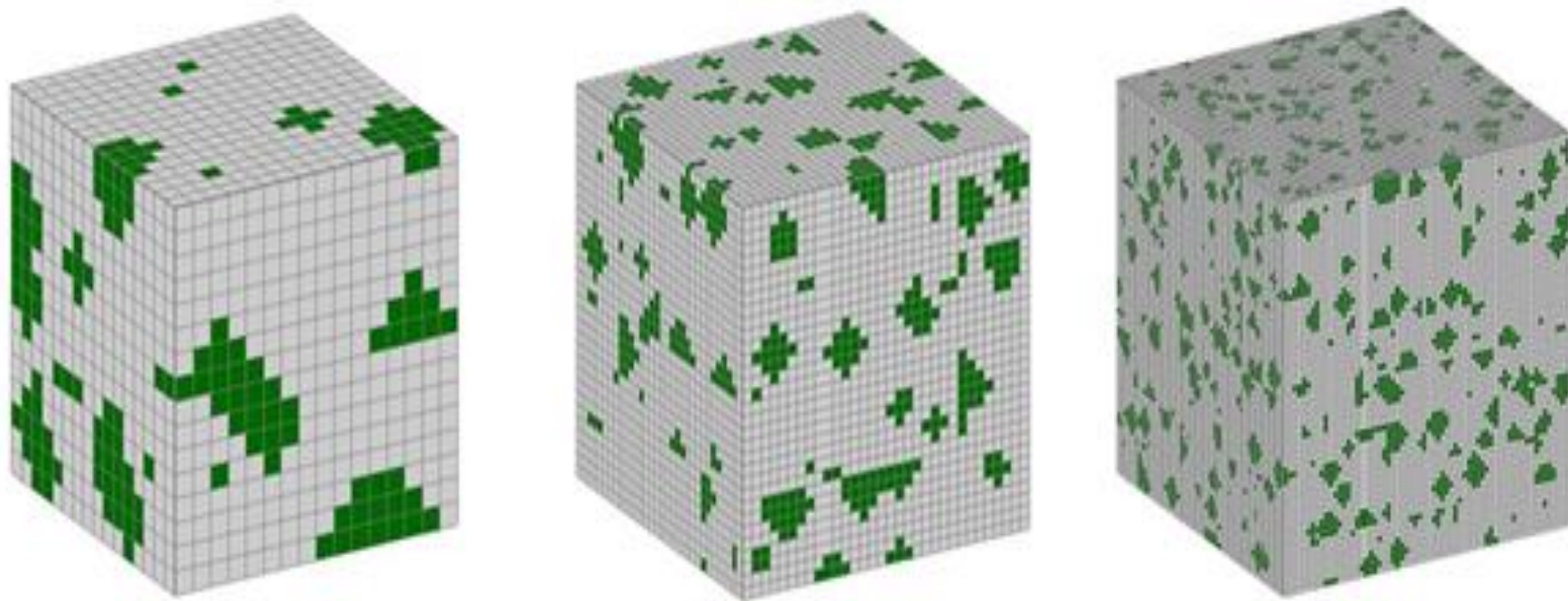
Конечно-элементный пакет ACELAN-COMPOS



Разработан на кафедре математического моделирования ЮФУ.
Реализованы алгоритмы формирования представительных объемов для композитов различной связности с широким набором свойств внутренней структуры.
Определяется полный набор эффективных модулей пьезоэлектрических композитов

ACELAN-COMPOS.

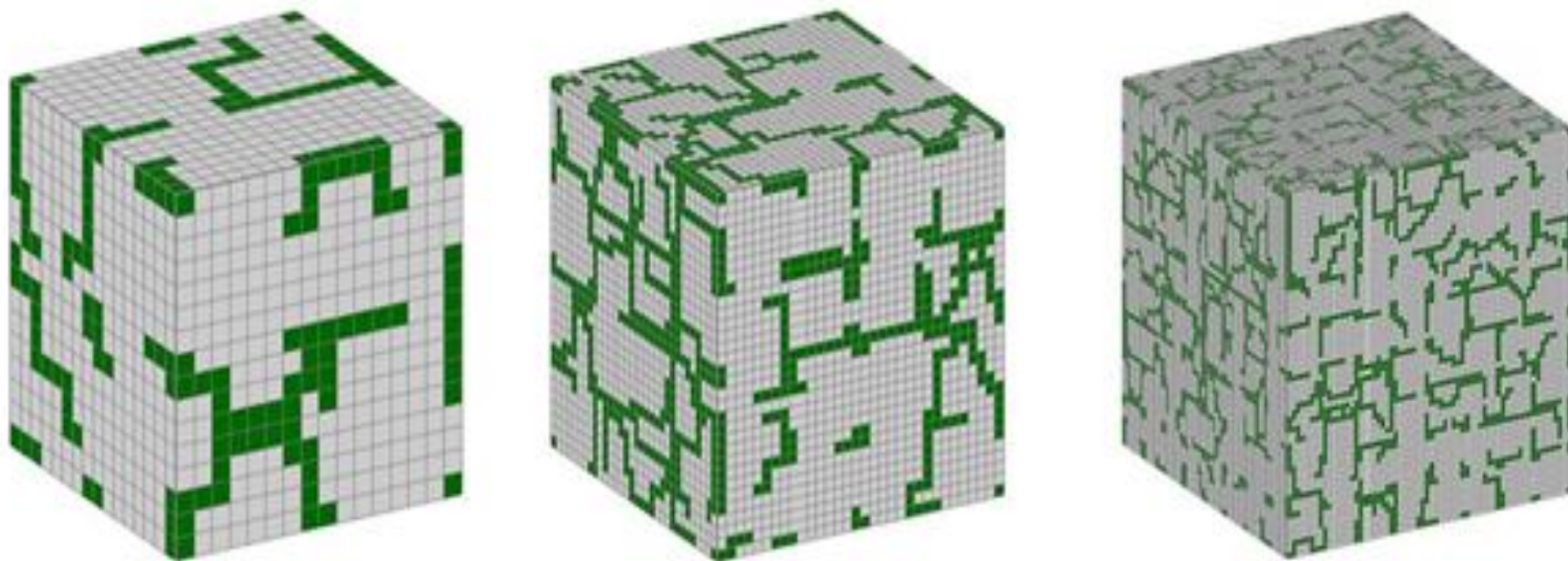
**Представительные объемы 3-0 связности, поры
или гранулы в матрице**



Можно задавать общую пористость, максимальные и минимальные размеры включений (пор) и др.

ACELAN-COMPOS.

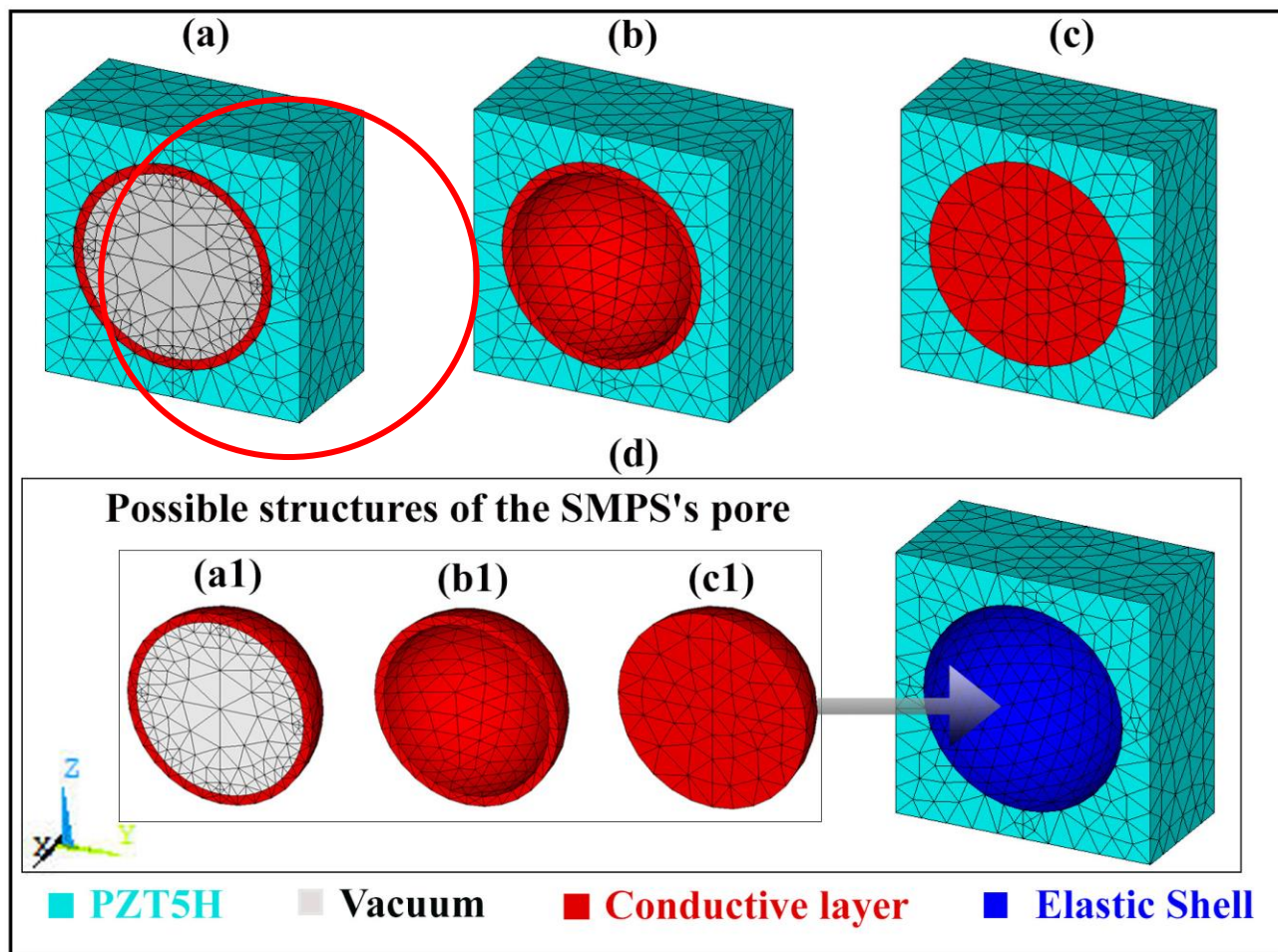
Представительные объемы 3-3 связности



Можно задавать общую пористость, реализован прямой и обратный алгоритмы и др.

КЭ моделирование представительных объемов

- Различные возможные структуры пористого пьезокомпозита с металлизированной поверхностью пор.
- Моделирование упругих свойств металла.



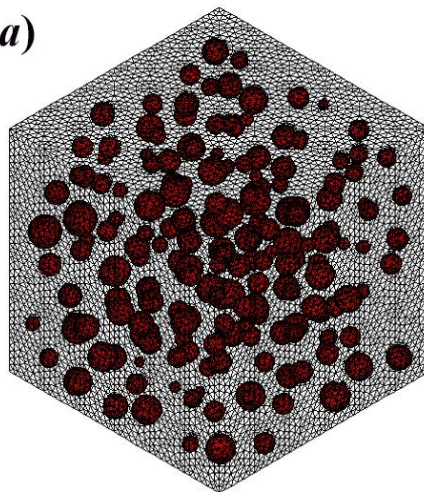
Nasedkin A.V., Nassar M.E. A numerical study about effects of metal volume fraction on effective properties of porous piezoelectric composite with metalized pore boundaries. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. **2022**; 29; 4359-4372. doi: 10.1080/15376494.2021.1928346.

КЭ моделирование представительных объемов

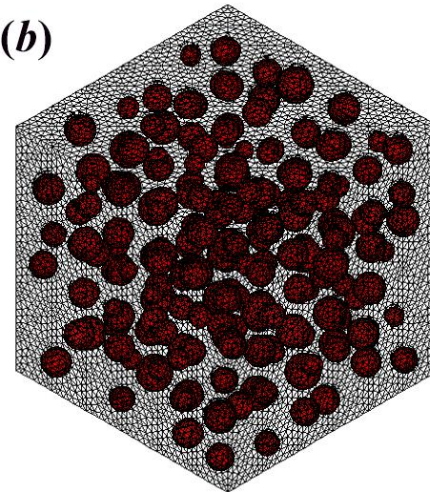
RVE случайной структуры

Для моделирования пьезоэлектрических композитов со случайно рассеянными включениями различных размеров.

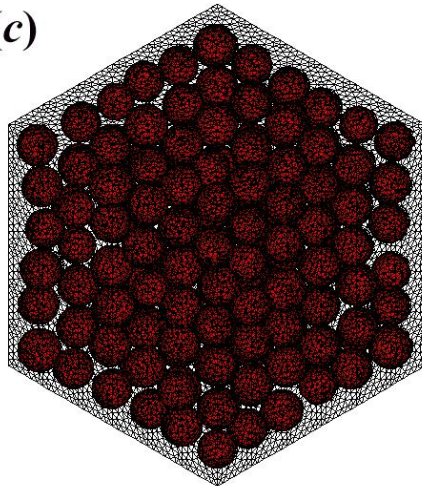
(a)



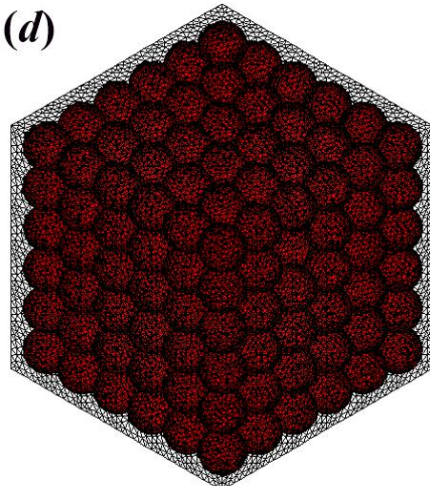
(b)



(c)



(d)



(a) $\vartheta_p = 0.05$

(b) $\vartheta_p = 0.1$

(c) $\vartheta_p = 0.3$

(d) $\vartheta_p = 0.5$

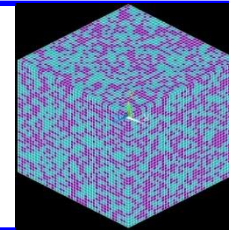
Nasedkin A., Nassar M.E. Comprehensive numerical characterization of a piezoelectric composite with hollow metallic inclusions using an adaptable random representative volume. *Computers & Structures*. **2022**; 267; 106799. doi: 10.1016/j.compstruc.2022.106799

Вычислительный алгоритм

I. Генерация представительного объема



II. Возможности трансфера модели
представительного объема в конечно-
элементный пакет

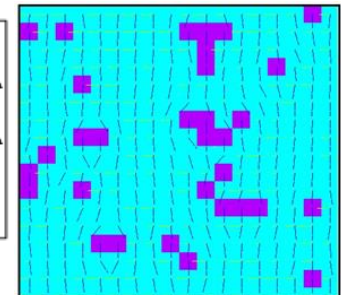
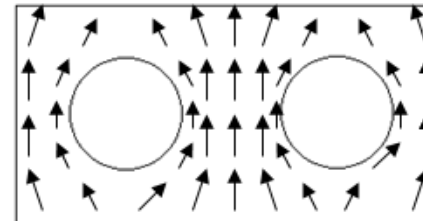


III. Моделирование неоднородной поляризации при решении
отдельной задачи квазиэлектростатики диэлектриков

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_* \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\varphi = V_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j},$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q$$



IV. Вычисление электрических полей



V. Нахождение и запоминание векторов поляризации для каждого конечного элемента. Модифицирование материальных свойств элементов в соответствии с найденными векторами поляризации



VI. Решение задач гомогенизации (5 раз для пьезокерамики, 9 раз в общем случае)



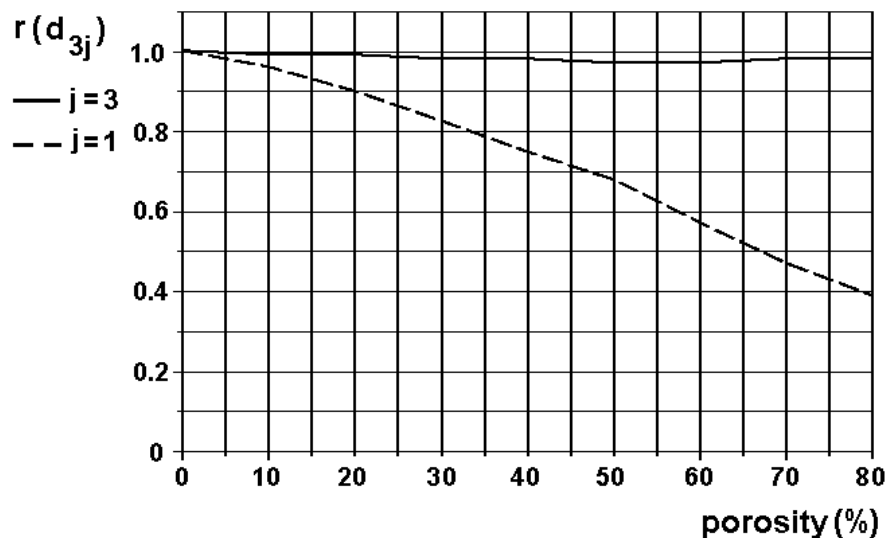
VII. Вычисление всех эффективных модулей (10 – для пьезокерамики)

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $C_{11}^{eff}, C_{12}^{eff}, C_{13}^{eff}, e_{31}^{eff}$ | 2. $C_{44}^{eff}, e_{15}^{eff} = e_{24}^{eff}$ | 3. $C_{13}^{eff}, C_{33}^{eff}, e_{33}^{eff}$ |
| 4. $e_{15}^{eff}, \varepsilon_{11}^{Seff}$ | 5. $e_{31}^{eff}, e_{33}^{eff}, \varepsilon_{33}^{Seff}$ | |

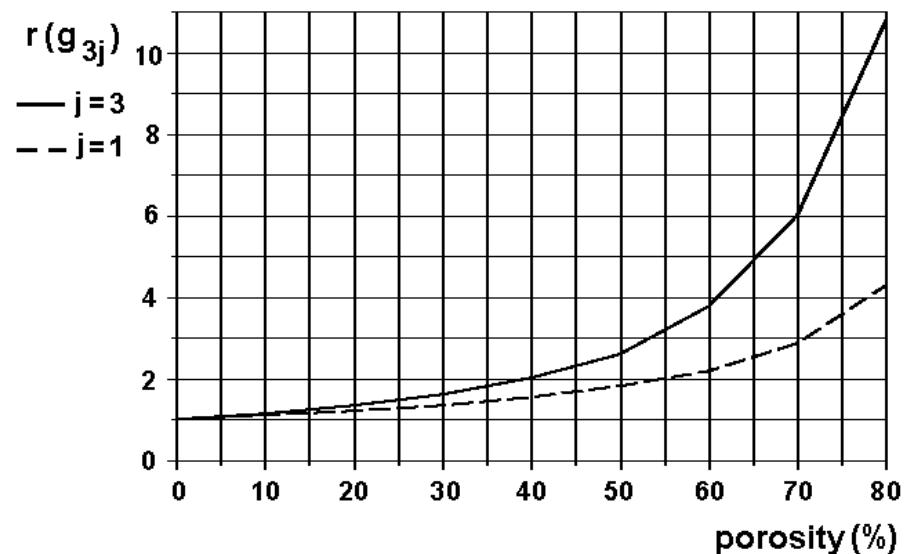


VIII. Вычисление других модулей ($d_{31}^{eff}, d_{33}^{eff}$ и др.) из найденных на этапе VI

Некоторые результаты вычисления эффективных модулей для 3-3 моделей. Пьезомодули d_{33} , d_{31} и g_{33} , g_{31}



$$r(d_{3j}) = d_{3j}^{eff} / d_{3j}$$



$$r(g_{3j}) = g_{3j}^{eff} / g_{3j}$$

Частоты электрических резонансов и антирезонансов

Активные и реактивные электрические воздействия

Разность потенциалов $\Delta V \exp(i\omega t)$

Электрический заряд (Ток) $I \exp(i\omega t), \quad Q = \pm i\omega^{-1} I$

Важнейшие электрические характеристики

Электрический импеданс $Z = \Delta V / I$

Электрический адмитанс $Y = Z^{-1} = I / \Delta V$

Частоты электрических резонансов ω_{rk}

$$\omega \rightarrow \omega_{rk}; \quad |I| \rightarrow \infty; \quad |Y(\omega)| \rightarrow \infty; \quad |Z(\omega)| \rightarrow 0$$

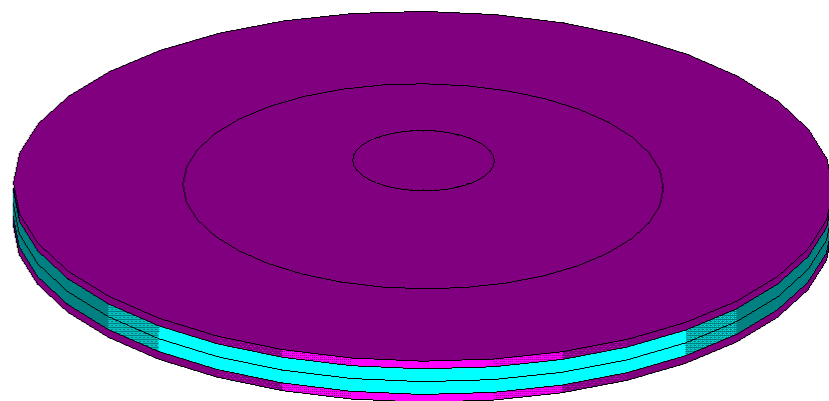
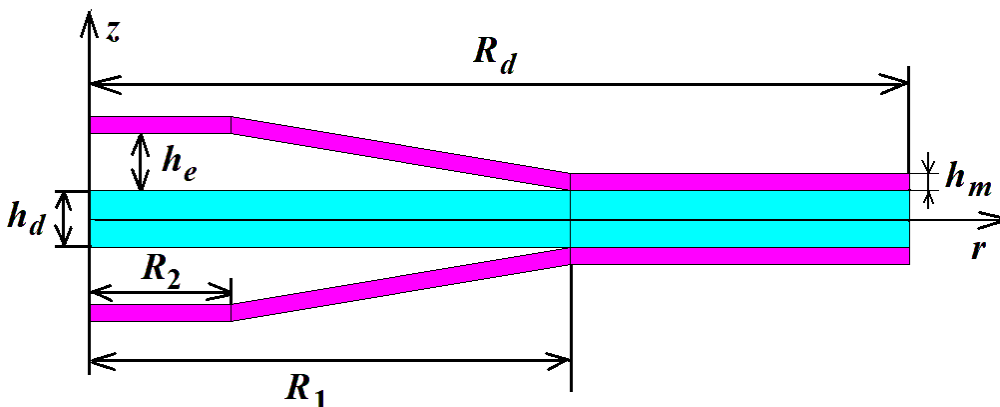
Частоты электрических антирезонансов ω_{ak}

$$\omega \rightarrow \omega_{ak}; \quad |\Delta V| \rightarrow \infty; \quad |Z(\omega)| \rightarrow \infty; \quad |Y(\omega)| \rightarrow 0$$

Поперечное сечение Cymbal Transducer



Геометрия меридионального сечения и 3D вид (в разных масштабах)



$$R_d = 14.5, \quad h_d = 1, \quad R_1 = 8.5, \quad R_2 = 2.5, \quad h_e = 1, \quad h_m = 0.3 \text{ (mm)}$$

Установившиеся колебания Cymbal Transducer

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 ; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^{E \text{ eff}} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^{\text{eff}*} \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{e}^{\text{eff}} \cdot \mathbf{S} - \boldsymbol{\varepsilon}^{S \text{ eff}} \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}; \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi; \quad \mathbf{L}^*(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}$$

с подходящими граничными условиями (механическими и электрическими).

Для сенсорных применений (**energy harvesting**), прикладываются активные ненулевые механические нагрузки, а на выходе анализируются реактивные электрические нагрузки

Для актуаторных применений (**underwater applications**), прикладываются активные ненулевые электрические нагрузки, а на выходе генерируются акустические волны.

Эффективные модули в зависимости от пористости:

1 – обычная пористость;

2 – тонкая металлизация; 3 – толстая металлизация

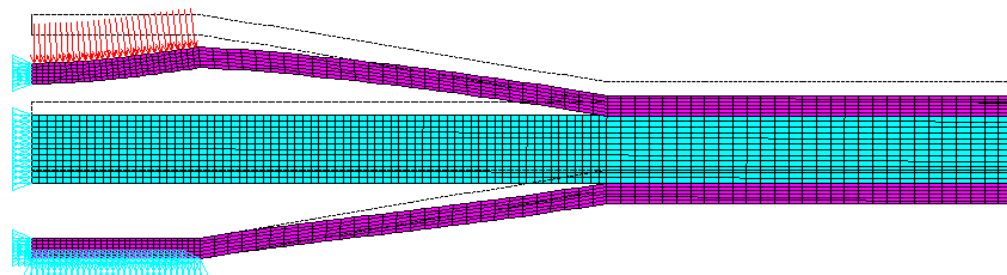
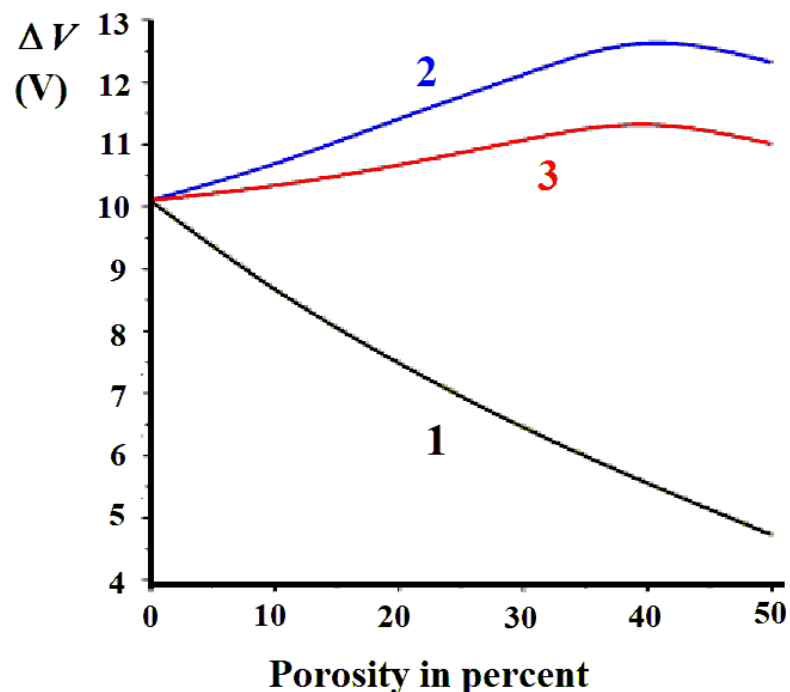
$$c_{\alpha\beta}^{E\text{ eff}}, \cdot 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$e_{j\beta}^{\text{eff}} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{jj}^{S\text{ eff}} = \varepsilon_{jj}^{S\text{ eff}} / \varepsilon_0$$

№	p(%)	ρ	$c_{11}^{E\text{ eff}}$	$c_{12}^{E\text{ eff}}$	$c_{13}^{E\text{ eff}}$	$c_{33}^{E\text{ eff}}$	$c_{44}^{E\text{ eff}}$	e_{33}^{eff}	e_{31}^{eff}	e_{15}^{eff}	$\tilde{\varepsilon}_{11}^{S\text{ eff}}$	$\tilde{\varepsilon}_{33}^{S\text{ eff}}$
0	0	7500	12.6	7.95	8.41	11.7	2.3	23.3	-6.5	17.0	1700	1470
1	10	6750	9.77	5.78	5.94	8.66	1.98	20.9	-4.2	14.3	1520	1300
	20	6000	7.76	4.31	4.32	6.63	1.7	18.3	-2.93	11.9	1340	1130
	30	5250	6.2	3.25	3.2	5.18	1.45	15.7	-2.15	9.91	1150	960
	40	4500	4.93	2.46	2.4	4.08	1.21	13.2	-1.62	8.16	980	810
	50	3750	3.87	1.86	1.82	3.21	0.99	10.7	-1.24	6.62	810	670
	10	6760	9.21	5.22	5.59	8.46	1.97	15.81	-12.12	15.5	2760	2480
2	20	6020	7.12	3.65	3.97	6.49	1.69	11.28	-15.49	14.31	4130	3620
	30	5280	5.64	2.65	2.93	5.11	1.44	7.97	-17.74	13.2	6090	5180
	40	4540	4.5	1.98	2.21	4.06	1.21	5.23	-19.32	12.0	9330	7670
	50	3790	3.58	1.51	1.69	3.23	1.0	2.79	-20.48	10.7	18180	13900
	10	6990	10.8	6.47	6.88	10.1	2.16	19.7	-9.62	16.4	2710	2360
3	20	6480	9.49	5.36	5.73	8.83	2.04	17.1	-12.1	16.0	4030	3440
	30	5970	8.42	4.5	4.84	7.85	1.93	15.2	-14.2	15.8	5920	4930
	40	5460	7.55	3.81	4.11	7.07	1.83	13.8	-16.0	15.7	9080	7330
	50	4950	6.82	3.24	3.51	6.41	1.75	12.8	-16.0	15.7	17700	13500

Анализ Cymbal Transducer как пьезогенератора «зеленой энергии» (нерезонансные низкочастотные колебания, металлические тарелки из стали) без учета внешней среды

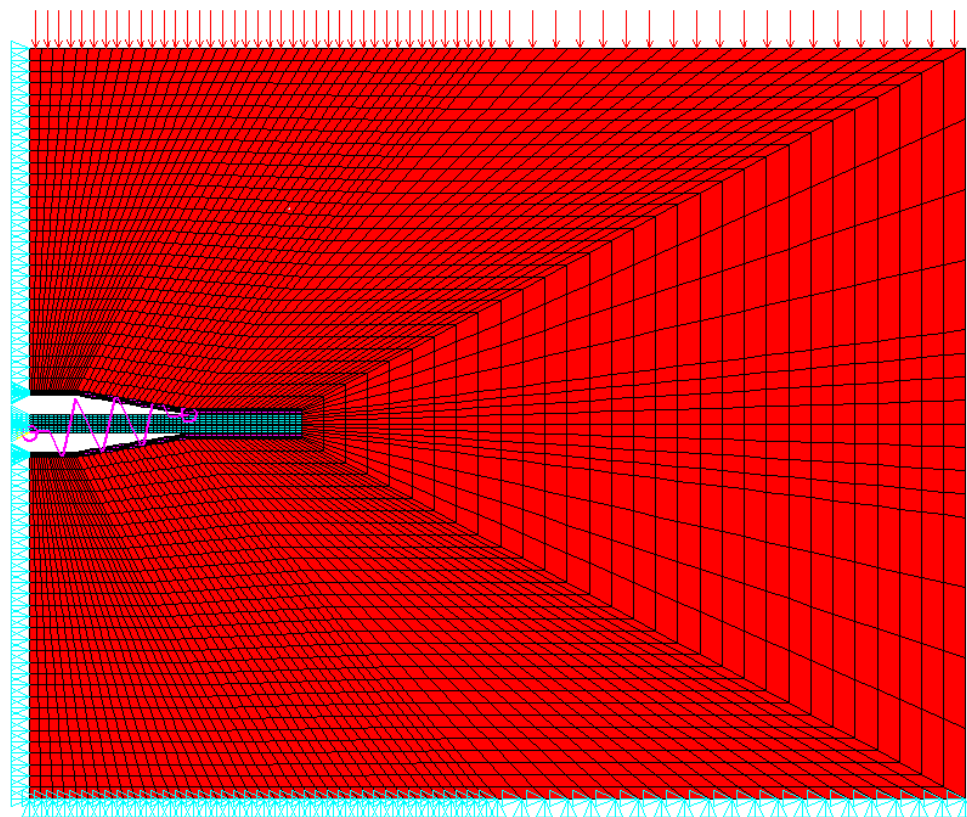
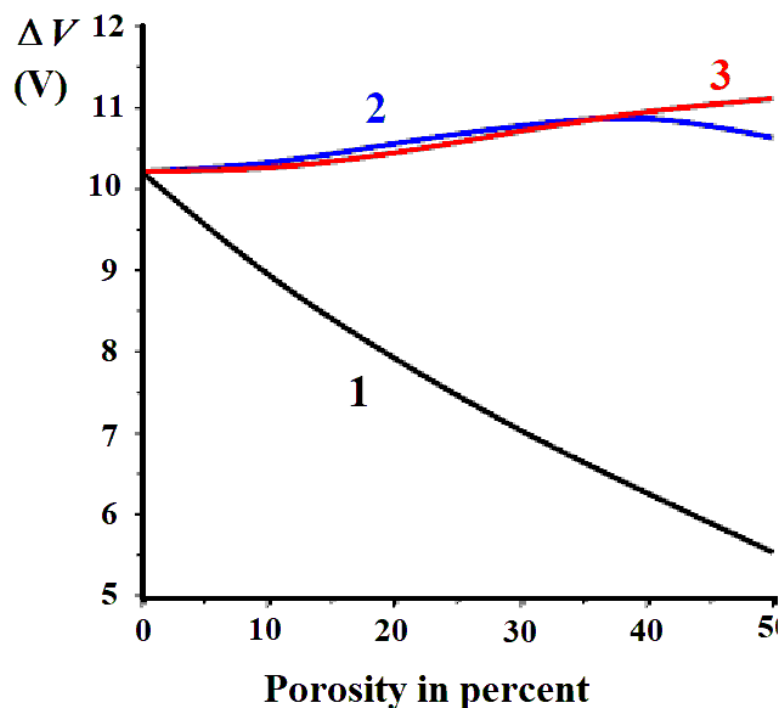


1 – обычная пористость;

2 – очень тонкое металлическое покрытие поверхностей пор;

3 – относительно толстое металлическое покрытие поверхностей пор

Анализ Cymbal Transducer как пьезогенератора «зеленой энергии» (нерезонансные низкочастотные колебания, металлические тарелки из стали) во внешней среде (асфальтовое покрытие)

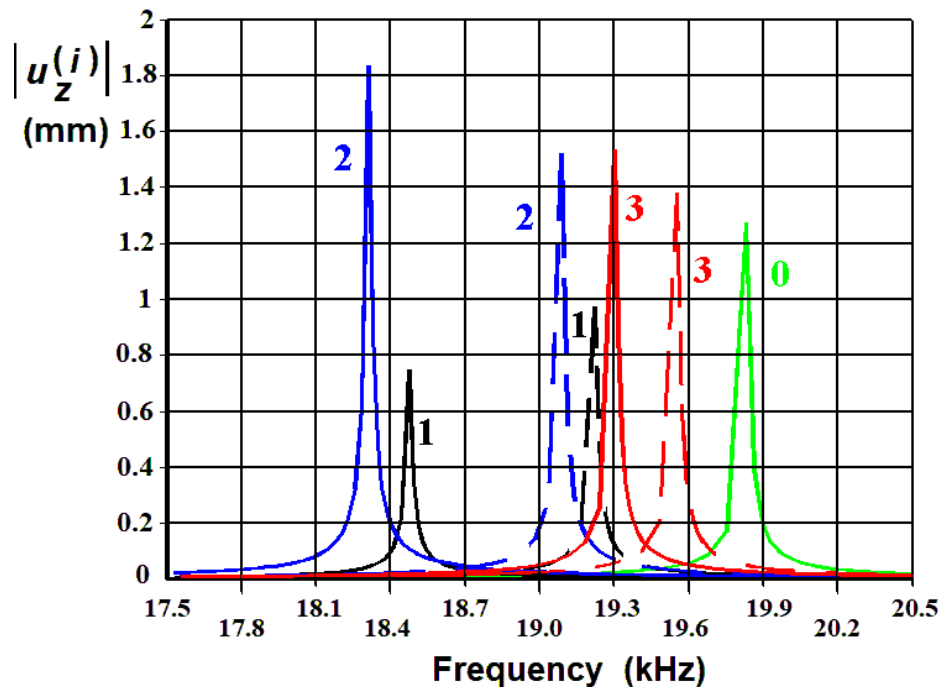


1 – обычная пористость;

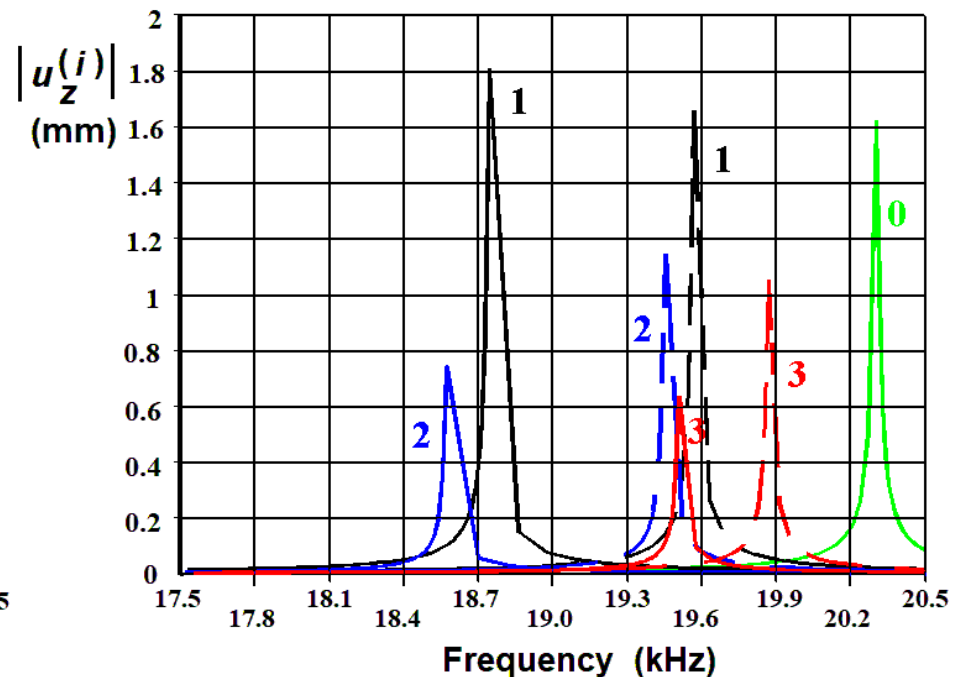
2 – очень тонкое металлическое покрытие поверхностей пор;

3 – относительно толстое металлическое покрытие поверхностей пор

Cymbal Transducer для актуаторных применений
(колебания вблизи первой резонансной частоты)
(a) с заданным электрическим потенциалом $\Delta V=100$ (V),
(b) с заданным электрическим зарядом $Q=0.25 \cdot 10^{-6}$ (C)
0 – плотная керамика; 1 – обычные поры;
2 – тонкая металлизация; 3 – толстая металлизация



(a)



(b)

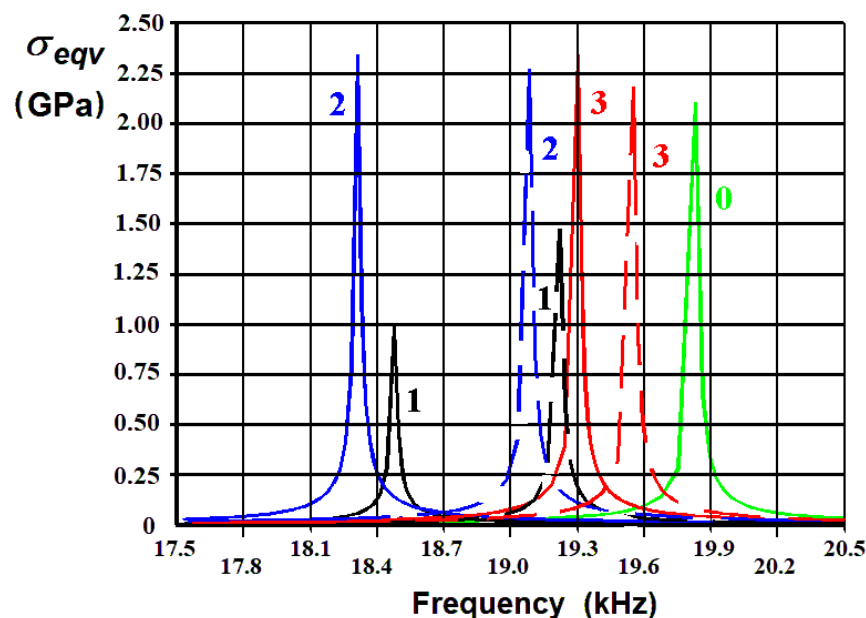
Сплошные кривые с номерами 1–3 приведены для материалов с пористостью 40%,
 штриховые кривые – для материалов с пористостью 20%.

Сymbal Transducer для актуаторных применений (колебания вблизи первой резонансной частоты при заданной разности потенциалов)

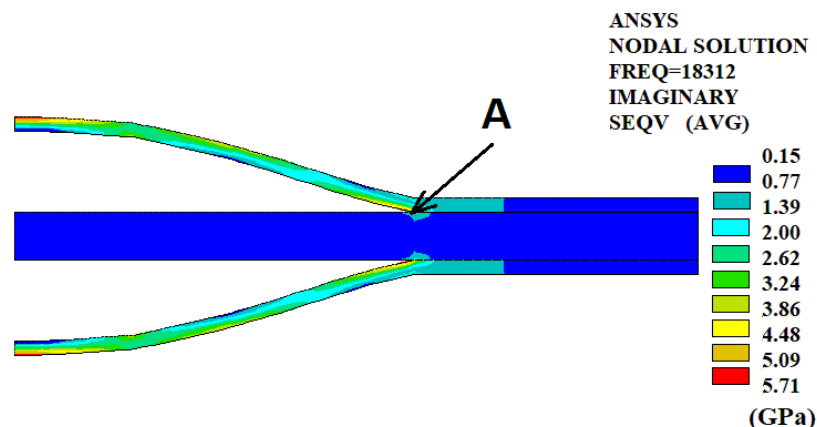
- (a) Напряжения по Мизесу в месте концентрации напряжений на диске
(b) Мнимая часть напряжений на резонансной частоте для варианта 2 с 40% пористости

0 – плотная керамика; 1 – обычные поры;

2 – тонкая металлизация; 3 – толстая металлизация



(a)

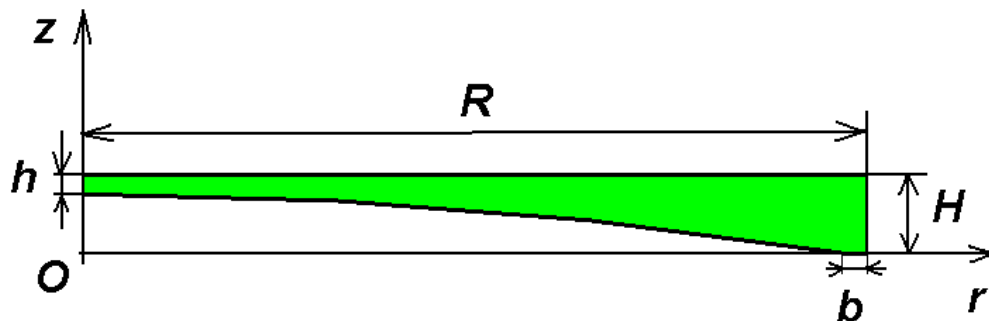


(b)

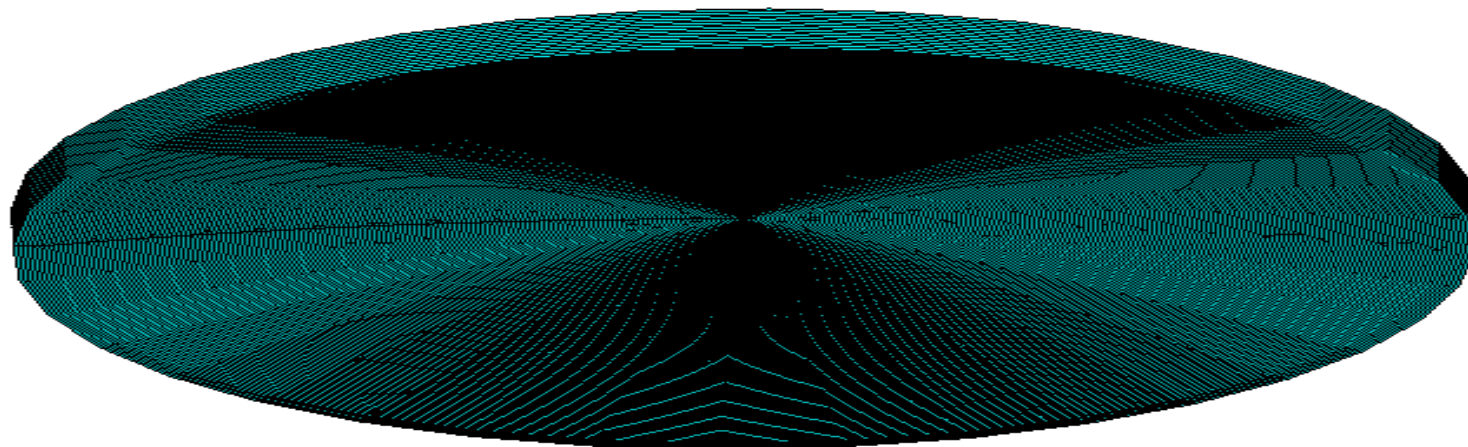
Сплошные кривые с номерами 1–3 приведены для материалов с пористостью 40%, штриховые кривые – для материалов с пористостью 20%.

Дисковый преобразователь с одной плоско-вогнутой преобразователь.

Геометрия меридионального сечения и полный вид

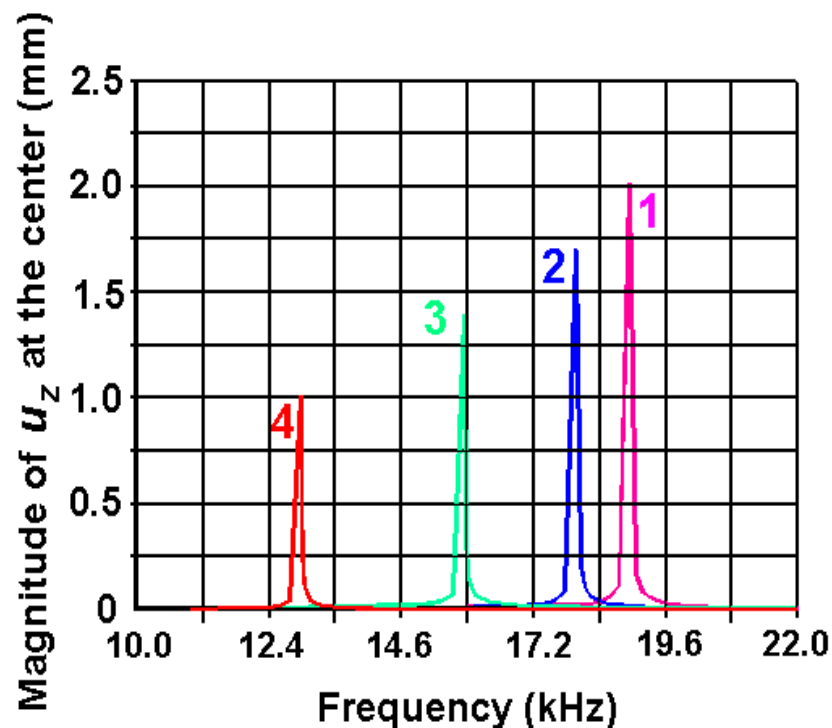


$$R = 8 \text{ mm}, \quad H = 0.8 \text{ mm}, \quad h = 0.2 \text{ mm}, \quad b = 0.25 \text{ mm}$$

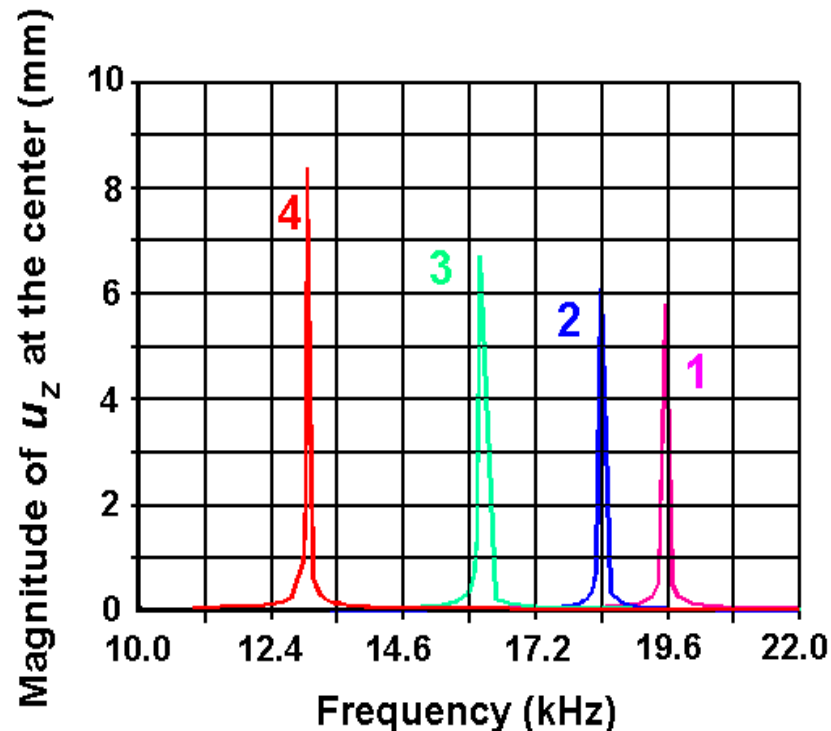


Установившиеся колебания плоско-вогнутого преобразователя.

АЧХ осевых перемещений в центральной точке для различной пористости при возбуждении колебаний разностью потенциалов (а) и при возбуждении колебаний электрическим зарядом (током) (б)
(1 – 0%, 2 – 20 %, 3 – 40 %, 4 – 60 % пористости)



(а) – с ростом пористости амплитуды убывают



(б) – с ростом пористости амплитуды возрастают

Преобразователь крутильных колебаний.

Пьезокерамический цилиндр (слева) поляризован в окружном направлении, электроды – по торцам

- (a) упругий стержень без крутки,
- (b) закрученный упругий стержень,
- (c) конечно-элементная сетка модели с закрученным стержнем



(a)



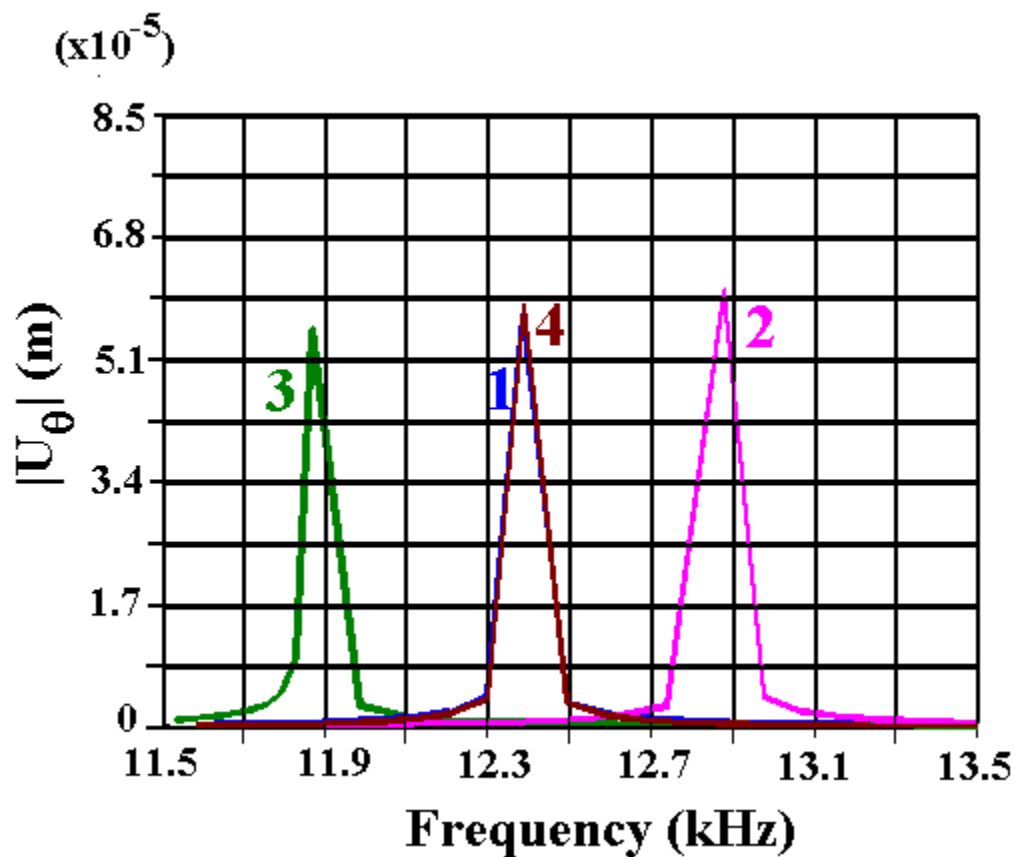
(b)



(c)

АЧХ окружных перемещений на грани торца преобразователя

при возбуждении колебаний разностью потенциалов



1 - $\tau_0=2$, $p = 20\%$,

2 - $\tau_0=2$, $p = 0\%$,

3 - $\tau_0=0$, $p = 20\%$,

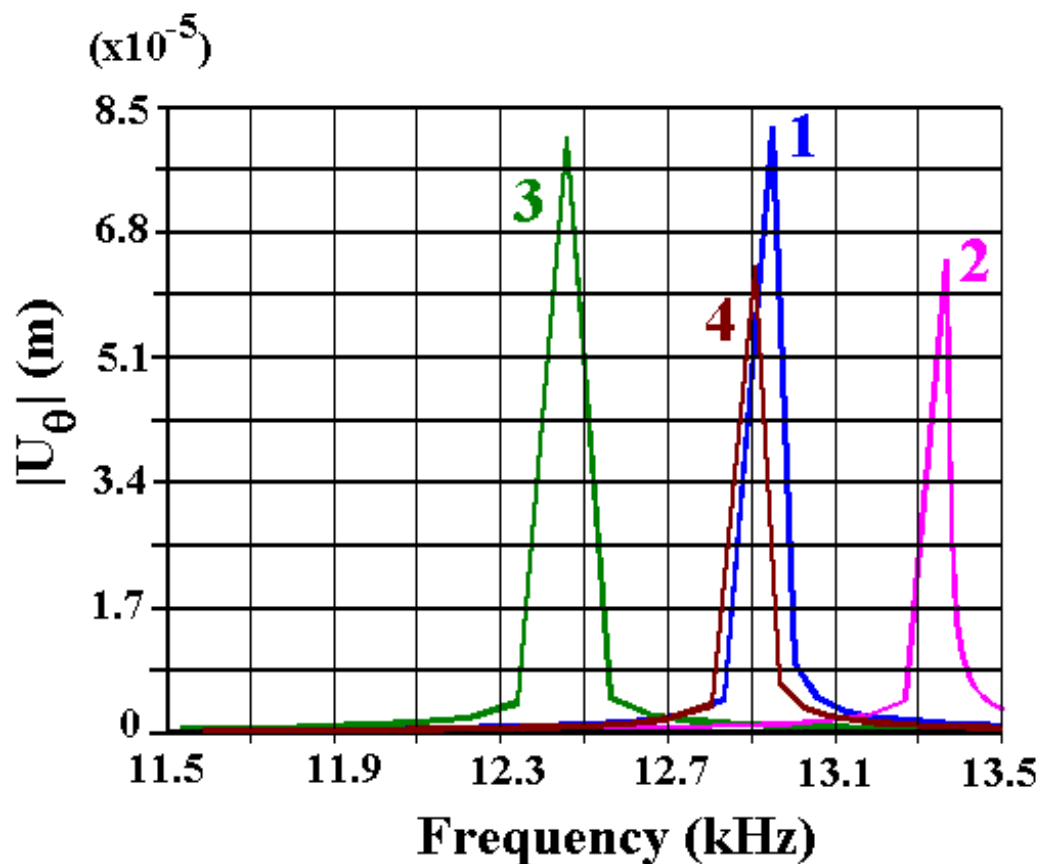
4 - $\tau_0=0$, $p = 0\%$,

Максимумы у кривых 2 и 4 ($p=0$) больше максимумов кривых 1 и 3 ($p=20\%$), т.е.

с ростом пористости амплитуды убывают

АЧХ окружных перемещений на грани торца преобразователя

при возбуждении колебаний электрическим зарядом (током)

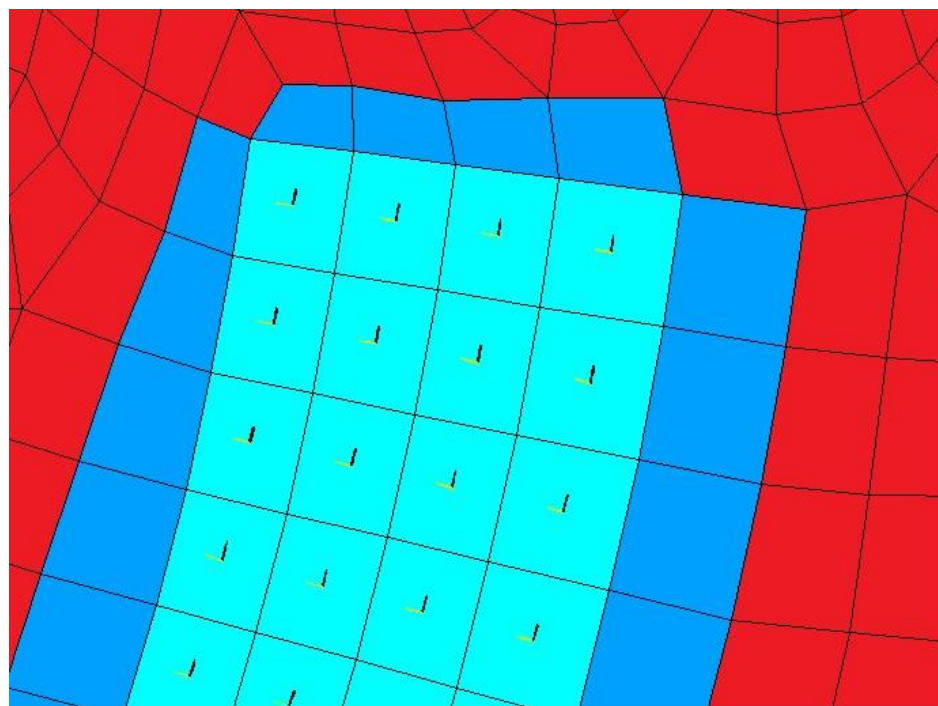
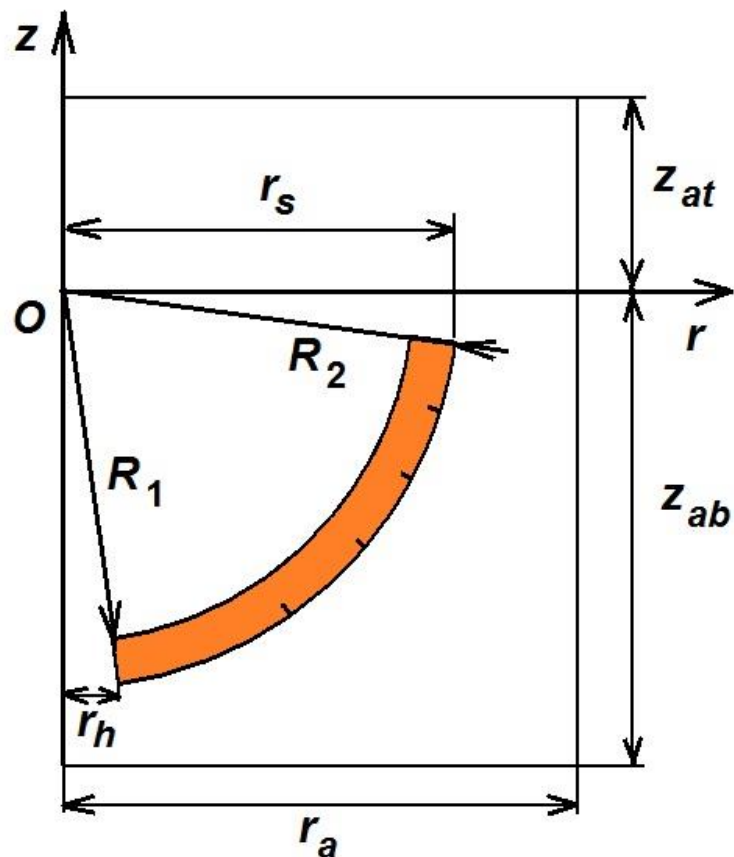


- 1 - $\tau_0=2$, $p = 20\%$,
- 2 - $\tau_0=2$, $p = 0\%$,
- 3 - $\tau_0=0$, $p = 20\%$,
- 4 - $\tau_0=0$, $p = 0\%$,

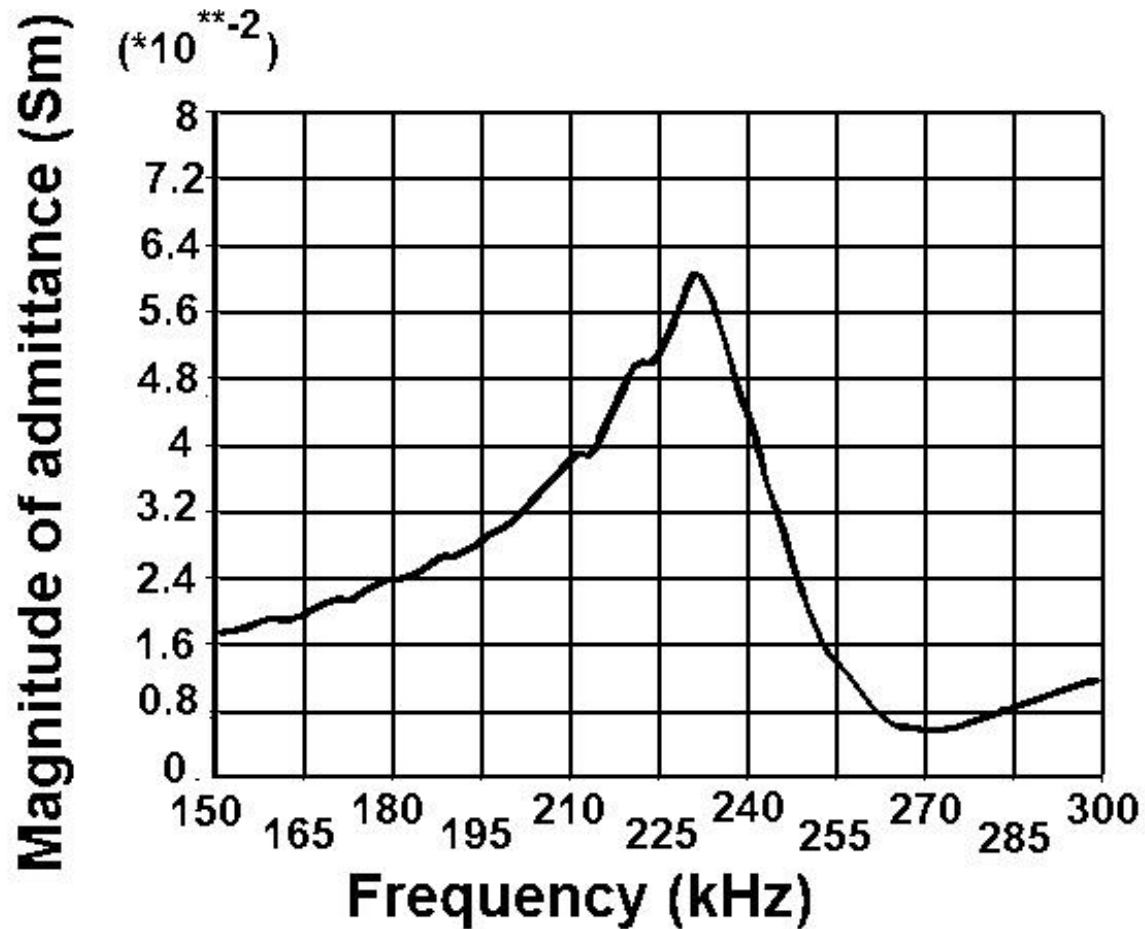
Максимумы у кривых 2 и 4 ($p=0$) меньше максимумов кривых 1 и 3 ($p=20\%$), т.е.

с ростом пористости амплитуды возрастают

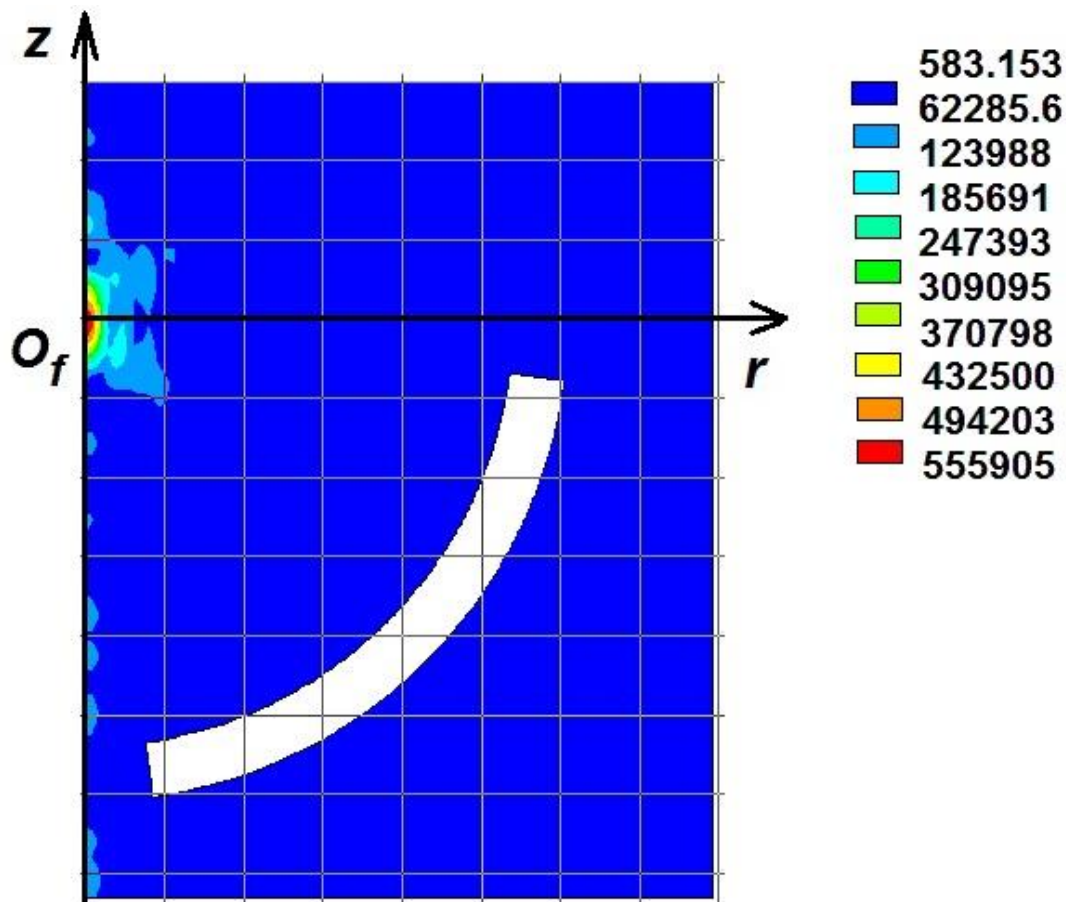
Сферический пьезоэлектрический преобразователь из пористой пьезокерамики (пористость 20 %) с разрезными электродами



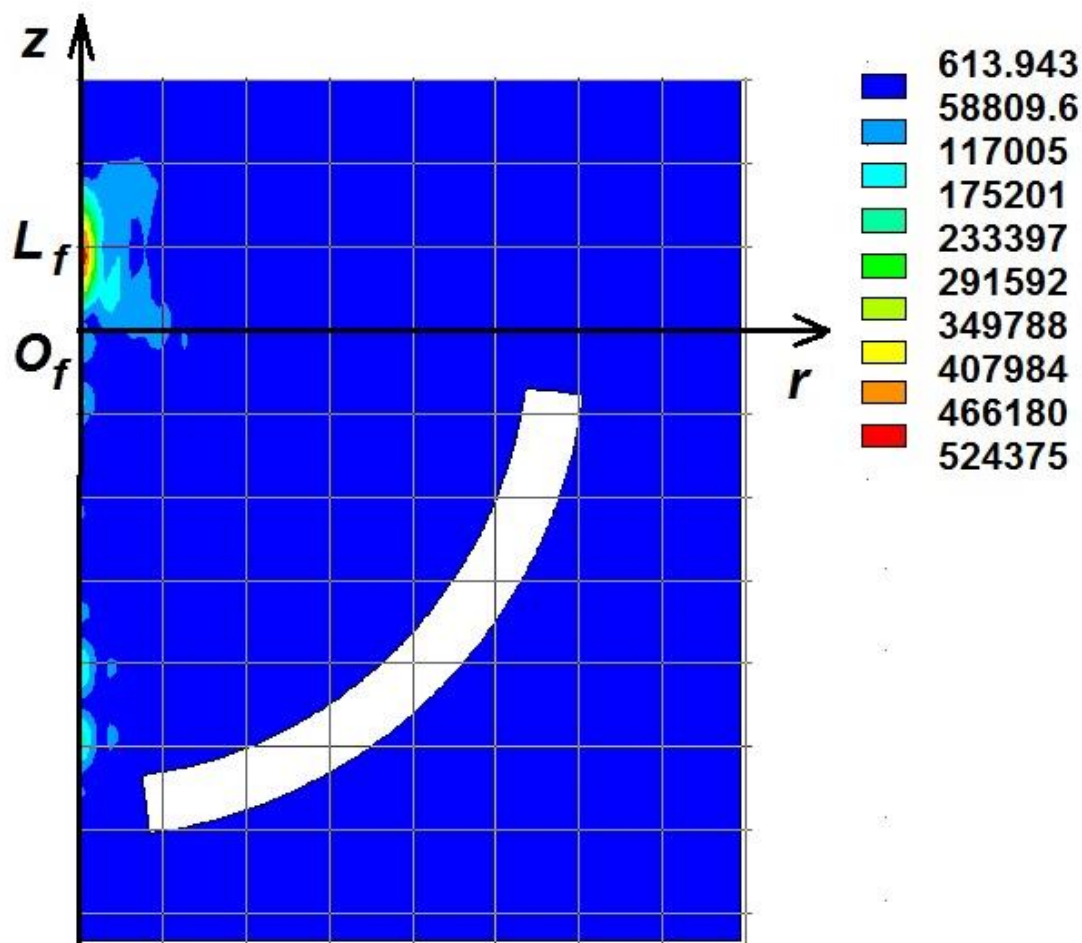
АЧХ электрического адмитанса, $N_e=15$, $L_f=0$



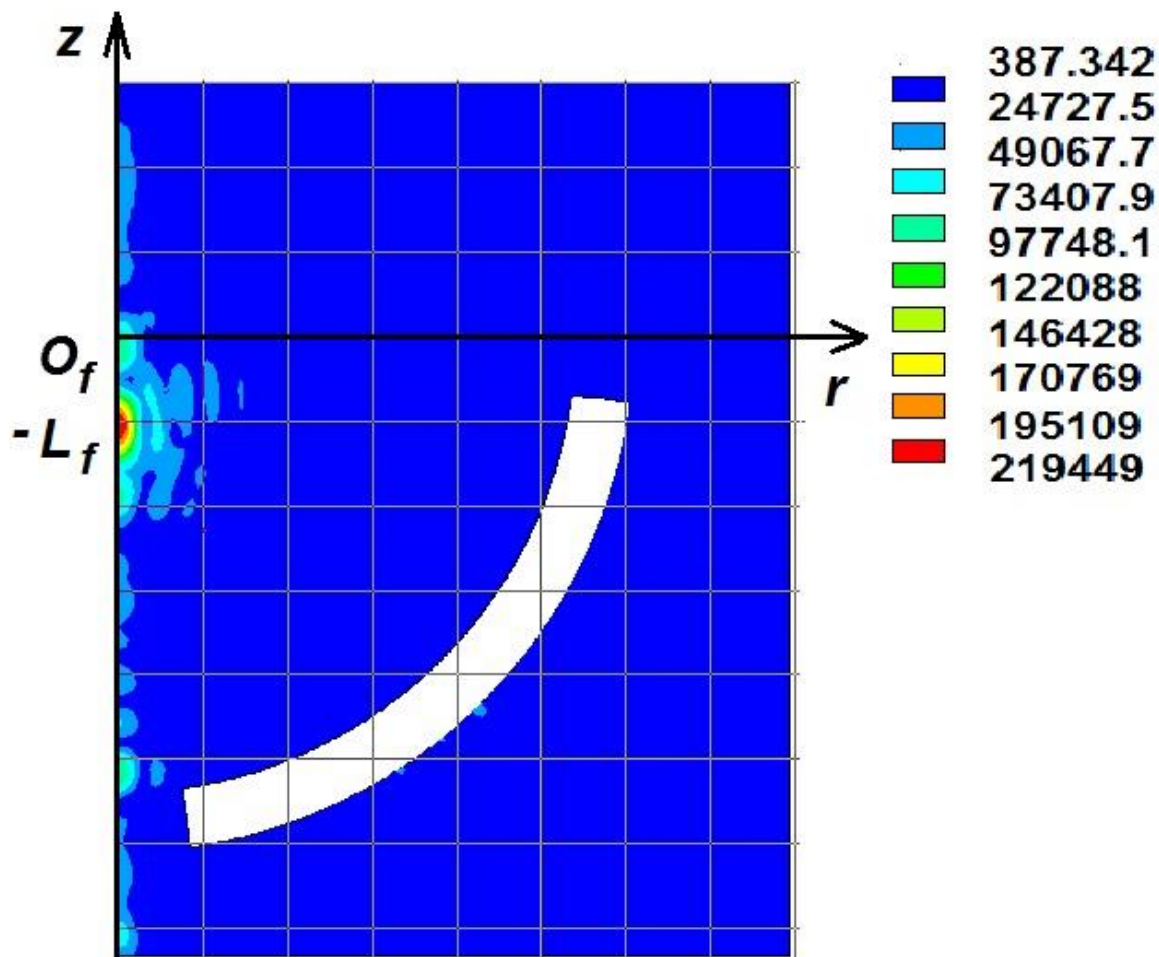
Распределение акустического давления $|p|$ при $N_e=15$, $L_f=0$, $f=231$ (кГц)



Распределение акустического давления $|p|$ при $N_e=15$, $L_f=10$ (мм), $f=231$ (кГц)



Распределение акустического давления $|p|$ при $N_e=15$, $L_f=-10$ (мм), $f=231$ (кГц)



Заключение и выводы

Метод конечных элементов для пьезоэлектрического анализа (статические, модальные, гармонические и переходные задачи) с седловыми структурами матриц конечных элементов (с акустической средой и внешней электрической цепью)

Конечно-элементные подходы к решению задачи гомогенизации пьезоэлектрического композиционного материала

Пакет конечных элементов ACELAN-COMPOS для моделирования активных композиционных материалов с внутренней структурой.

Численный анализ тарелочных, плоско-вогнутых, крутильных и сферических пьезоэлектрических преобразователей из пористой пьезокерамики ЦТС.

Для рассмотренных пьезопреобразователей в режимах излучения с ростом пористости их эффективность уменьшалась при возбуждении колебаний разностью потенциалов вблизи резонансных частот

Для тех же пьезопреобразователей в режимах излучения с ростом пористости их эффективность увеличивалась при возбуждении колебаний электрическим зарядом (током) вблизи антирезонансных частот