

О свойствах скоростей блуждания и показателей колеблемости на множестве дифференциальных систем, задающих повороты плоскости

Панеш Асхад Асланович
Сташ Айдамир Хазретович

Адыгейский государственный университет, КМЦ АГУ

V Всероссийская научная конференция
«Осенние математические чтения в Адыгее»
Майкоп, 09–14 октября 2025 г.

Пространство линейных однородных систем

$$n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{M}^n: \quad \dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty);$$

$$A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n;$$

$\mathcal{S}_*(A)$ – множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$;

$$\overline{\mathbb{R}}_+ \equiv \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

Пространство систем, задающих повороты плоскости

$$\mathcal{M}^2 \supset \mathcal{R}^2 : \quad \dot{x} = a(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R},$$

$\mathcal{S}_*(a)$ – множество всех ненулевых решений системы $a \in \mathcal{R}^2$.

Замечание

Операторы Коши $X_a(t, 0)$ системы $a \in \mathcal{R}^2$ образуют семейство ортогональных *поворотов ориентированной* фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с *угловой скоростью* $a(t)$, зависящей от параметра времени $t \in \mathbb{R}_+$.

Обозначения

Пусть $t > 0$, $m \in \mathbb{R}_*^n$ и $x \in \mathcal{S}_M^n$:

- $\nu^-(x, m, t)$ — число точек *смены знака* скалярного произведения $\langle x(\cdot), m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;
- $\nu^0(x, m, t)$ — число *нулей* функции $\langle x(\cdot), m \rangle$ на $(0, t]$;
- $\nu^+(x, m, t)$ — число *корней* (т.е. нулей с учетом их кратностей) функции $\langle x(\cdot), m \rangle$ на $(0, t]$;
- $\nu^*(x, m, t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчета этого количества каждый некрatный нуль считается ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Показатели колеблемости

*Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ при $\alpha \in \{-, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами*

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_{*}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t),$$

$$\left(\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_{*}^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) \right),$$

$$\hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_{*}^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t),$$

$$\left(\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_{*}^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) \right).$$

Вариация следа

Определим *вариацию следа* функции $x \in \mathcal{S}_M^n$ за время от 0 до t формулой

$$\gamma(x, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(x, \tau) \right| d\tau,$$

где

$$e(x, \tau) \equiv \frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}, \quad |x(\tau)| \equiv \sqrt{x_1^2(\tau) + \dots + x_n^2(\tau)}.$$

Скорости блуждания

Для каждой функции $x \in \mathcal{S}_M^n$ определим ее нижнюю и верхнюю скорости блуждания соответственно формулами

$$\check{\mu}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t), \quad \hat{\mu}(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \gamma(x, t).$$

И.Н. Сергеев, 2011

Спектры показателей колеблемости двумерных систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, состоят из одного значения.

А.Х. Сташ, 2015

Спектры показателей колеблемости двумерных систем могут достигать мощность континуума.

В.В. Миценко, 2015

Спектры скоростей блуждания двумерных систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, могут достигать мощность континуума.

Теорема 1

Для любого ненулевого решения x любой системы $a \in \mathcal{R}^2$

$$\check{\mu}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t |a(\tau)| d\tau, \quad \hat{\mu}(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t |a(\tau)| d\tau.$$

Теорема 2

Если система $a \in \mathcal{R}^2$ удовлетворяет условию

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} a(t) \equiv \beta \geq 0 \quad \text{или} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} a(t) \equiv -\beta \leq 0,$$

то при любом $\alpha \in \{-, 0, +\}$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \beta \leq \check{\mu}(a) &= \varliminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left| \int_0^t a(\tau) d\tau \right| = \check{\nu}_\circ^\alpha(a) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(a) \leq \\ &\leq \hat{\mu}(a) = \varlimsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left| \int_0^t a(\tau) d\tau \right| = \hat{\nu}_\circ^\alpha(a) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(a). \end{aligned}$$

Инвариантность относительно б.м. возмущений

Наделим пространство $\mathcal{R}^2$ *равномерной* на $\mathbb{R}_+$ топологией и обозначим

$$\mathcal{B}(a) = \{c \in \mathcal{R}^2 \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} |c(t) - a(t)| = 0\}, \quad a \in \mathcal{R}^2.$$

Бесконечно малым возмущением системы $a \in \mathcal{R}^2$ назовем любое возмущение $b - a$, для которого $b \in \mathcal{B}(a)$, а функционал $\kappa : \mathcal{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ назовем *инвариантным в точке a относительно бесконечно малых возмущений*, если выполнено равенство $\kappa(a) = \kappa(b)$ при всех $b \in \mathcal{B}(a)$.

Остаточный функционал

Назовем функционал $\varkappa : \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *остаточным*, если для любых функций $x, y \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $x(t) = y(t)$, $t \geq t_0$, имеет место равенство $\varkappa(x) = \varkappa(y)$.

И.Н.Сергеев, 1983

Если остаточный функционал, определенный на $\mathcal{M}^n$, полунепрерывен во всех точках в одном и том же смысле, то в любой точке $A \in \mathcal{M}^n$ он инвариантен относительно бесконечно малых возмущений.

Лемма

При любом $n \in \mathbb{N}$ каждый из функционалов $\hat{\mu}, \check{\mu} : \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ является остаточным.

Теорема 3

Скорости блуждания $\hat{\mu}, \check{\mu} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывны на пространстве $\mathcal{R}^2$.

Следствие

Скорости блуждания $\hat{\mu}, \check{\mu} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений в любой точке $a \in \mathcal{R}^2$.

А.Х. Сташ, 2012, 2023

На множестве n -мерных дифференциальных систем крайние значения показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней не являются непрерывными и инвариантными относительно бесконечно малых возмущений при любом $n \geq 2$.

И.Н. Сергеев, 2019

Показатели колеблемости гиперкорней системы из множества $\mathcal{R}^2$, у которой угловая скорость отделена от нуля, устойчивы при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях ее коэффициента.

Теорема 4

Если система $a \in \mathcal{R}^2$ удовлетворяет условию

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} a(t) \equiv \beta > 0 \quad \text{или} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} a(t) \equiv -\beta < 0,$$

то в точке $a \in \mathcal{R}^2$ все показатели колеблемости

$$\hat{\nu}_o^-, \hat{\nu}_o^0, \hat{\nu}_o^+, \check{\nu}_o^-, \check{\nu}_o^0, \check{\nu}_o^+, \hat{\nu}_\bullet^-, \hat{\nu}_\bullet^0, \hat{\nu}_\bullet^+, \check{\nu}_\bullet^-, \check{\nu}_\bullet^0, \check{\nu}_\bullet^+ : \mathcal{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

непрерывны и инвариантны относительно бесконечно малых возмущений.

- ▶ Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
- ▶ Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. № 6. С. 21–26.
- ▶ Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.
- ▶ Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2015. Вып. 2(46). С. 171–183.

- ▶ Сергеев И.Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2019. № 1. С. 21–26.
- ▶ Сташ А.Х. Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 143–144.
- ▶ Миценко В.В. О спектрах характеристик блуждаемости линейных дифференциальных систем и уравнений// Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 822–824.
- ▶ Сташ А.Х. О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2023. № 1. С. 78–109.

Спасибо за внимание!