

Экстремальные вероятностные задачи на взвешенных графах

Д. А. Шабанов

МФТИ, МГУ, ВШЭ

Осенние математические чтения в Адыгее
11.10.2025

Random assignment problem

Пусть $M = (m_{ij} : i, j = 1, \dots, n) \in \text{Mat}(n \times n)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой являются независимыми $\text{Exp}(1)$ случайными величинами. Пусть S_n — группа перестановок чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим

$$T_n = \min_{\sigma \in S_n} (m_{1\sigma(1)} + \dots + m_{n\sigma(n)})$$

— минимальный суммарный вес сопоставления столбцов и строк.

Random assignment problem

Пусть $M = (m_{ij} : i, j = 1, \dots, n) \in \text{Mat}(n \times n)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой являются независимыми $\text{Exp}(1)$ случайными величинами. Пусть S_n — группа перестановок чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим

$$T_n = \min_{\sigma \in S_n} (m_{1\sigma(1)} + \dots + m_{n\sigma(n)})$$

— минимальный суммарный вес сопоставления столбцов и строк.

Вопрос: чему равно ET_n ?

Random assignment problem

Пусть $M = (m_{ij} : i, j = 1, \dots, n) \in \text{Mat}(n \times n)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой являются независимыми $\text{Exp}(1)$ случайными величинами. Пусть S_n — группа перестановок чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим

$$T_n = \min_{\sigma \in S_n} (m_{1\sigma(1)} + \dots + m_{n\sigma(n)})$$

— минимальный суммарный вес сопоставления столбцов и строк.

Вопрос: чему равно ET_n ?

Гипотеза (Дж. Паризи, 1998)

$$ET_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Random assignment problem

Теорема (Д. Олдос, 2000)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} T_n = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Random assignment problem

Теорема (Д. Олдос, 2000)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}T_n = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Теорема (С. Линуссон, Й. Вастлунд, 2004; Ч. Нейр, Б. Прабхакар, М. Шарма, 2005)

Гипотеза Паризи верна

$$\mathbb{E}T_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Random assignment problem

Теорема (Д. Олдос, 2000)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}T_n = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Теорема (С. Линуссон, Й. Вастлунд, 2004; Ч. Нейр, Б. Прабхакар, М. Шарма, 2005)

Гипотеза Паризи верна

$$\mathbb{E}T_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Одно из доказательств гипотезы использует связь этой задачи с классической задачей о “сумасшедшей старушке”.

Минимальный вес остовного дерева

Пусть $K_n = (V_n, E_n)$ — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны случайные веса $(w_e, e \in E_n)$, являющимися положительными н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Для каждого остовного дерева T определим его вес как сумму весов входящих в него ребер:

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w_e.$$

Минимальный вес остовного дерева

Пусть $K_n = (V_n, E_n)$ — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны случайные веса $(w_e, e \in E_n)$, являющимися положительными н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Для каждого остовного дерева T определим его вес как сумму весов входящих в него ребер:

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w_e.$$

Рассмотрим минимальный вес остовных деревьев K_n :

$$mst_F(K_n) = \min_T w(T).$$

Вопрос: чему равно $E[mst_F(K_n)]$?

Минимальный вес остовного дерева

Теорема (А. Фриз, 1985)

Если $a = F'(0) \in (0, \infty)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[mst_F(K_n)] = \frac{\zeta(3)}{a} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Минимальный вес остовного дерева

Теорема (А. Фриз, 1985)

Если $a = F'(0) \in (0, \infty)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[mst_F(K_n)] = \frac{\zeta(3)}{a} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Теорема (К. Купер, А. Фриз, Н. Инс, С. Янсон, Дж. Спенсер, 2013)

Если F — это функция распределения $U(0, 1)$, то

$$\mathbb{E}[mst_F(K_n)] = \zeta(3) + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^{4/3}} + o(n^{-4/3}).$$

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

- 1 Отсортируем все ребра графа по возрастанию весов: $e_1, e_2, \dots, e_N$.

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

- 1 Отсортируем все ребра графа по возрастанию весов: $e_1, e_2, \dots, e_N$.
- 2 Рассматриваем ребра в получившемся порядке. Пусть E_i — уже набранный на шаге i набор ребер.

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

- 1 Отсортируем все ребра графа по возрастанию весов: $e_1, e_2, \dots, e_N$.
- 2 Рассматриваем ребра в получившемся порядке. Пусть E_i — уже набранный на шаге i набор ребер.
- 3 Если ребро e_{i+1} соединяет две разных компоненты связности графа $G_i = (V, E_i)$, то добавляем его в набор $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$. Иначе, пропускаем его.

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

- 1 Отсортируем все ребра графа по возрастанию весов: $e_1, e_2, \dots, e_N$.
- 2 Рассматриваем ребра в получившемся порядке. Пусть E_i — уже набранный на шаге i набор ребер.
- 3 Если ребро e_{i+1} соединяет две разных компоненты связности графа $G_i = (V, E_i)$, то добавляем его в набор $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$. Иначе, пропускаем его.
- 4 Получившийся в конце набор ребер E_N будет образовывать минимальное по весу остовное дерево в графе G .

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

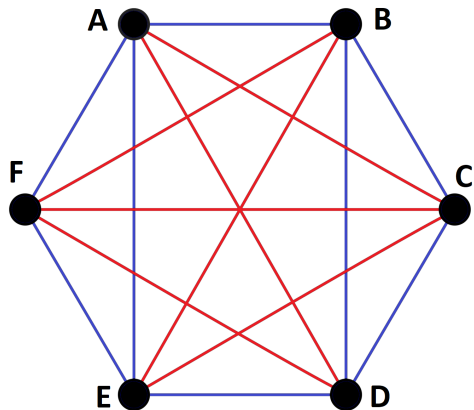


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

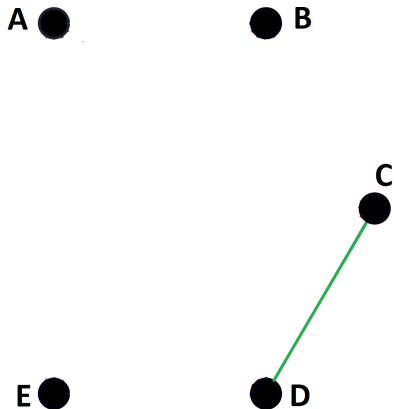


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

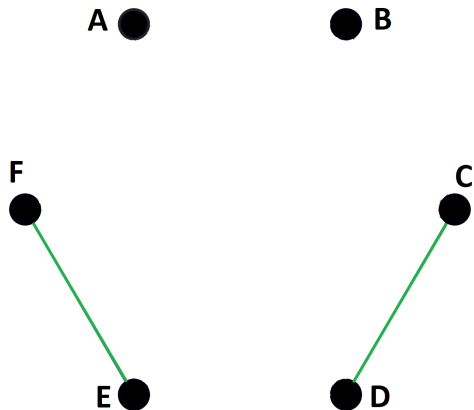


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

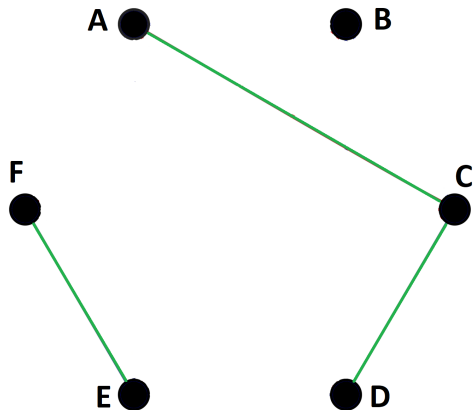


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

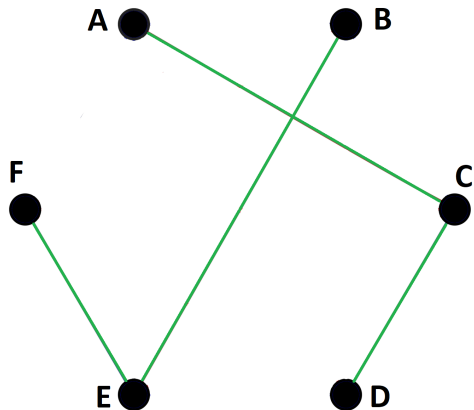


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

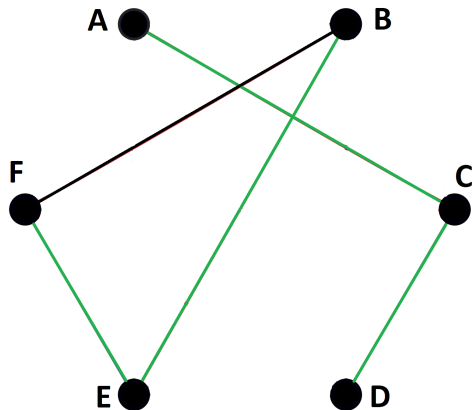


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

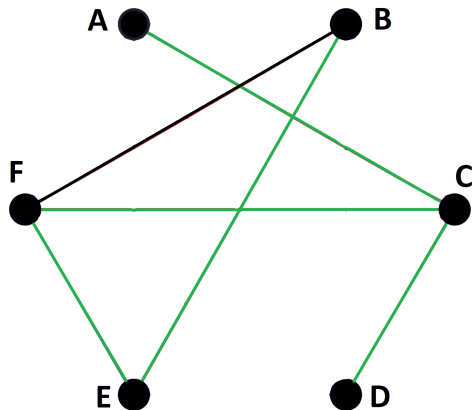


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

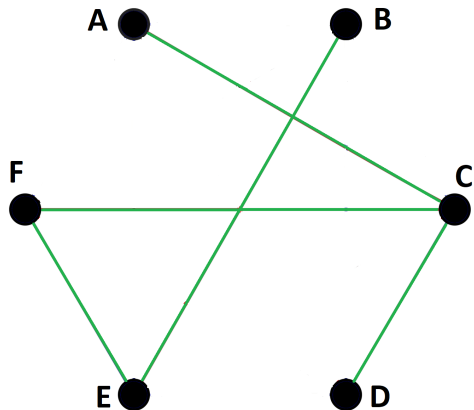


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку t ребер?

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер? В силу симметрии модели это будет случайный подграф K_n с равномерным распределением на всех подграфах с m ребрами, т.е. классическая равномерная модель Эрдеша–Реньи $G(n, m)$.

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер? В силу симметрии модели это будет случайный подграф K_n с равномерным распределением на всех подграфах с m ребрами, т.е. классическая равномерная модель Эрдеша–Реньи $G(n, m)$. Из теории случайных графов известно, что

- Пока m невелико ($< n/2$) вероятность того, что мы добавим e_m в набор, будет равна $1 - o(1)$.

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер? В силу симметрии модели это будет случайный подграф K_n с равномерным распределением на всех подграфах с m ребрами, т.е. классическая равномерная модель Эрдеша–Реньи $G(n, m)$. Из теории случайных графов известно, что

- Пока m невелико ($< n/2$) вероятность того, что мы добавим e_m в набор, будет равна $1 - o(1)$.
- При $m > n \ln n$ случайный граф $G(n, m)$ связан с вероятностью $1 - o(1)$, а потому алгоритм к этому времени с большой вероятностью закончит свою работу.

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер? В силу симметрии модели это будет случайный подграф K_n с равномерным распределением на всех подграфах с m ребрами, т.е. классическая равномерная модель Эрдеша–Реньи $G(n, m)$. Из теории случайных графов известно, что

- Пока m невелико ($< n/2$) вероятность того, что мы добавим e_m в набор, будет равна $1 - o(1)$.
- При $m > n \ln n$ случайный граф $G(n, m)$ связан с вероятностью $1 - o(1)$, а потому алгоритм к этому времени с большой вероятностью закончит свою работу.
- При $m \sim cn/2$ и $c > 1$ в $G(n, m)$ будет единственная гигантская компонента размера $\beta n(1 - o(1))$, где $\beta = \beta(c)$ есть решение уравнения $\beta + e^{-\beta c} = 1$. Следовательно, вероятность того, что мы добавим e_m в набор будет равна $(1 - \beta^2)(1 - o(1))$.

Подставляя асимптотику математических ожиданий младших порядковых статистик, получаем, что минимальный вес остовного дерева будет в среднем сходиться к

$$\frac{1}{2a} \int_0^{\infty} x(1 - \beta^2(x)) dx = \frac{\zeta(3)}{a}.$$

Набор остовных k деревьев

В работе А. Фриза и Т. Йоханссона 2018 года было предложено естественное обобщение данной задачи на случай k остовных деревьев.

Набор остовных k деревьев

В работе А. Фриза и Т. Йоханссона 2018 года было предложено естественное обобщение данной задачи на случай k остовных деревьев.

Пусть снова $K_n = (V_n, E_n)$ — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны случайные веса $(w_e, e \in E_n)$, являющимися положительными н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Для натурального k введем

$$mst_{F,k}(K_n) = \min_{T_1, \dots, T_k \text{ — непересек.}} (w(T_1) + \dots + w(T_k)),$$

т.е. мы ищем сразу несколько попарно непересекающихся по ребрам остовных деревьев и пытаемся минимизировать их суммарный вес.

Набор остовных k деревьев

В работе А. Фриза и Т. Йоханссона 2018 года было предложено естественное обобщение данной задачи на случай k остовных деревьев.

Пусть снова $K_n = (V_n, E_n)$ — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны случайные веса $(w_e, e \in E_n)$, являющимися положительными н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Для натурального k введем

$$mst_{F,k}(K_n) = \min_{T_1, \dots, T_k \text{ — непересек.}} (w(T_1) + \dots + w(T_k)),$$

т.е. мы ищем сразу несколько попарно непересекающихся по ребрам остовных деревьев и пытаемся минимизировать их суммарный вес.

Вопрос: чему равно $E[mst_{F,k}(K_n)]$?

Определение

Граф $G = (V, E)$ называется k -deeply связным, если в нем есть k непересекающихся по ребрам остовных деревьев.

Определение

Граф $G = (V, E)$ называется k -deeply связным, если в нем есть k непересекающихся по ребрам остовных деревьев.

Утверждение

Любой граф единственным образом разбивается на компоненты k -deeply связности (отдельная вершина тоже может быть такой компонентой).

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

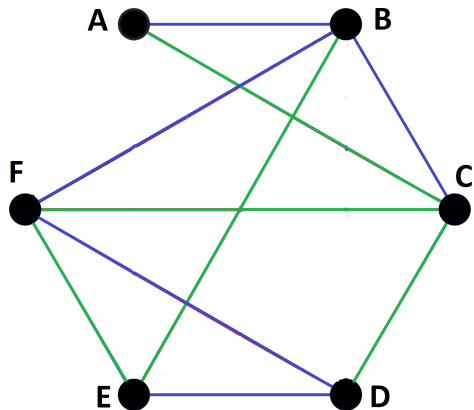


Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Новые результаты

Для формулировки результата нам понадобится несколько обозначений.

Новые результаты

Для формулировки результата нам понадобится несколько обозначений.

- 1 Обозначим через c_k положительное решение (относительно c) уравнения

$$c \cdot \frac{\sum_{j \geq k-1} \frac{c^j}{j!}}{\sum_{j \geq k} \frac{c^j}{j!}} = k.$$

Новые результаты

Для формулировки результата нам понадобится несколько обозначений.

- ❶ Обозначим через c_k положительное решение (относительно c) уравнения

$$c \cdot \frac{\sum_{j \geq k-1} \frac{c^j}{j!}}{\sum_{j \geq k} \frac{c^j}{j!}} = k.$$

- ❷ Для всех $x \leq c_k$ положим $\beta_k(x) = 0$. При $x > c_k$ определим $\beta_k(x)$ как решение (относительно β) уравнения

$$\beta = \sum_{j \geq k} \frac{(\beta x)^j}{j!} e^{-\beta x}.$$

Теорема о гигантской k -deeply компоненте

Теорема (Н. Звонков, Д. Шабанов, 2025)

Пусть $k > 1$ фиксировано. Рассмотрим случайный граф $G(\lceil n, cn/2 \rceil)$. Тогда

- 1) при $c < c_k$ с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $G(\lceil n, cn/2 \rceil)$ не имеет ни одной нетривиальной k -deeply компоненты;
- 2) при $c > c_k$ с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $G(\lceil n, cn/2 \rceil)$ содержит ровно одну нетривиальную k -deeply компоненту размера $\sim_{\mathbb{P}} \beta_k(c) \cdot n$.

Теорема (Н. Звонков, Д. Шабанов, 2025)

Пусть $k > 1$ фиксировано, а также дана функция распределения $F(x)$ положительной случайной величины, причем $F'(0) = a \in (0, +\infty)$. Пусть ребрам K_n приписаны независимые одинаково распределенные случайные веса с распределением $F(x)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[mst_{F,k}(K_n)] = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x (1 - \beta_k^2(x)) dx.$$

Теорема (Н. Звонков, Д. Шабанов, 2025)

Пусть $k > 1$ фиксировано, а также дана функция распределения $F(x)$ положительной случайной величины, причем $F'(0) = a \in (0, +\infty)$. Пусть ребрам K_n приписаны независимые одинаково распределенные случайные веса с распределением $F(x)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[mst_{F,k}(K_n)] = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x (1 - \beta_k^2(x)) dx.$$

При $k = 2$ данный результат был ранее получен А. Фризом и Т. Йоханссоном.

- Следуя идеям Фриза и Йоханссона, рассматриваются матроиды.

Ингредиенты доказательства

- Следуя идеям Фриза и Йоханссона, рассматриваются матроиды.
- Смысл в том, что тогда работает аналог алгоритма Крускала, мы будем добавлять в набор текущее ребро тогда и только тогда, когда оно увеличивает ранг матроида.

Ингредиенты доказательства

- Следуя идеям Фриза и Йоханссона, рассматриваются матроиды.
- Смысл в том, что тогда работает аналог алгоритма Крускала, мы будем добавлять в набор текущее ребро тогда и только тогда, когда оно увеличивает ранг матроида.
- Для подсчета ранга матроида случайного графа используются результаты о k -ядре случайного графа, а также некоторый результат из работы Гао, Переса-Хименеса и Сато (2017 г.).