

# Единая нормальная шкала роста целых функций конечного порядка

Б.А. Шишкин

октябрь 2025

Кубанский государственный университет  
ООО ПРАЙ

## О весах

Семейство всех неотрицательных функций, каждая из которых определена в окрестности  $+\infty$ , обозначим  $O(+\infty)$  (– кольцо ростков в точке  $+\infty$ ). Пусть  $\varphi, \mu \in O(+\infty)$ . Говорят, что функция  $\varphi$  *растет как функция  $\mu$* , если выполнены условия:

- 1)  $\varphi(r) = O(\mu(r))$  при  $r \rightarrow +\infty$ ,
- 2)  $\mu(r_n) = O(\varphi(r_n))$  при  $n \rightarrow +\infty$  для некоторой последовательности  $r_n \rightarrow +\infty$ .

Если функция  $\mu$  положительна и

$$\frac{\varphi(r)}{\mu(r)} \rightarrow \rho \in [0, +\infty], \quad r \rightarrow +\infty,$$

то число  $\rho$  называется *порядком* функции  $\varphi$  относительно функции  $\mu$ . Говорят, что функция  $\varphi$  *имеет нормальный рост* относительно функции  $\mu$ , если  $\rho \in (0, +\infty)$ .

**Теорема.** Функция  $\varphi$  растет как положительная функция  $\mu$  тогда и только тогда, когда она имеет нормальный рост относительно этой функции.

Неубывающие функции  $\mu \in O(+\infty)$  будем называть *веса*ми. Если функция  $\varphi \in O(+\infty)$  растет как вес  $\mu$ , то функцию  $\mu$  называем *весом функции*  $\varphi$ .

Пусть  $f$  – целая функция,  $\varphi_f := \ln M_f$ , где  $M_f(r)$  – максимум модуля функции  $f$  на круге радиуса  $r$ . Вес  $\mu_f$  функции  $\ln \varphi_f$  принято называть *весом целой функции*  $f$ . Порядок  $\rho_f$  функции  $\ln \varphi_f$  относительно логарифма  $\ln$  называется порядком целой функции  $f$ , то есть

$$\frac{\ln \varphi_f(r)}{\ln r} = \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \rightarrow \rho_f, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Если  $\rho_f \neq +\infty$ , то говорят, что целая функция  $f$  имеет конечный порядок.

## О шкалах роста

Выберем произвольное семейство функций  $\{\varphi\} \subseteq O(+\infty)$  и произвольное семейство весов  $\{\mu\}$ . Говорят, что семейство весов  $\{\mu\}$  является *шкалой роста* семейства функций  $\{\varphi\}$ , если выполнены:

- 1) *условие достаточности* (любая функция  $\varphi$  из семейства  $\{\varphi\}$  растёт как некоторая функция из семейства  $\{\mu\}$ ),
- 2) *условие необходимости* (любая функция из семейства  $\{\mu\}$  является весом некоторой функции из семейства  $\{\varphi\}$ ).

Если семейство  $\{\varphi\}$  состоит из неубывающих функций, то оно само является шкалой роста для себя.

Пусть семейство весов  $\{\mu\}_\alpha$  является шкалой роста семейства функций  $\{\varphi\}_\alpha \subseteq O(+\infty)$ . Тогда семейство функций  $\{\mu\} := \bigcup_\alpha \{\mu\}_\alpha$  называем *единой шкалой роста* семейства функций  $\{\varphi\} := \bigcup_\alpha \{\varphi\}_\alpha$ . При этом шкалы роста  $\{\mu\}_\alpha$  называем *локальными*, а совокупности функций  $\{\varphi\}_\alpha$  называем *областями приложения* локальных шкал роста.

## О шкалах роста

Единые шкалы роста строятся на основе выбора специальных функций – *модельных функций роста*. С общих позиций в качестве модельной функции роста можно выбрать любой вес, который растет медленнее тождественной функции  $r \mapsto r$  (например  $\ln$  или  $\ln \ln$  и т.д.). Общий прием построения единых шкал роста опирается на выбор конкретной модельной функции роста  $u$ . Этот прием состоит в пошаговом сравнении роста композиций  $u_m \circ \varphi$  с ростом композиций  $u_n$ , где  $u_m, u_n$  – операторные степени модельной функции  $u$ , если  $m = 0$ , то  $u_m$  – тождественное отображение по определению.

# Глубина роста

Если

$$\frac{u_m \circ \varphi(r)}{u_n(r)} \rightarrow \rho_{m,n} < +\infty,$$

то говорят, что функция  $\varphi$  имеет *глубину роста*  $m$  относительно функции  $u_n$ . Пусть  $\{\varphi\} \subseteq O(+\infty)$  и  $u$  – произвольная модельная функция. Любая функция  $\varphi \in \{\varphi\}$  по отношению к функции  $u$  характеризуется системой параметров роста первого уровня  $\rho_0, \rho_1, \dots$ , где

$$\rho_m := \rho_{m,1} := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{u_m \circ \varphi(r)}{u(r)}.$$

Только один из этих параметров может принимать положительное значение. Обозначим  $\{\varphi\}_m$  подсемейство  $\{\varphi\}$ , состоящее из функций, для которых  $\rho_{m-1} = +\infty$  и  $\rho_m < +\infty$ . Если  $\{\varphi\} := \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\varphi\}_m$ , то совокупность подсемейств  $\{\varphi\}_0, \{\varphi\}_1, \dots$  называется *разбиением* семейства функций  $\{\varphi\}$  по глубине роста относительно модельной функции  $u$ .

# Единые шкалы роста

Пусть  $\{\varphi\}_0, \{\varphi\}_1, \dots$  – разбиением семейства  $\{\varphi\} \subseteq O(+\infty)$  по глубине роста относительно модельной функции  $u$ . Построение единой шкалы роста для семейства функций  $\{\varphi\}$  заключается в построению шкал роста  $\{\mu\}_m$  подсемейств  $\{\varphi\}_m$ ,  $m = 0, 1, \dots$  (локальных шкал роста).

При этом локальная шкала роста  $\{\mu\}_m$  строится как единая шкала роста  $\{\mu\}_m^0 \cup \{\mu\}_m^+$ , где  $\{\mu\}_m^0$  – шкала роста подсемейства  $\{\varphi\}_m^0 \subseteq \{\varphi\}_m$ , состоящего из всех функций  $\varphi$ , для которых  $\rho_m = 0$ , а  $\{\mu\}_m^+$  – шкала роста подсемейства  $\{\varphi\}_m^+ \subseteq \{\varphi\}_k$ , состоящего из всех функций  $\varphi$ , для которых  $\rho_m > 0$ .

# Единые шкалы роста

Рост каждой функции из семейства  $\{\varphi\}_m^+$  характеризуется нормальным параметром роста  $\rho_m$ . Если  $\varphi \in \{\varphi\}_m^0$ , то  $\rho_m = 0$ , то есть параметр роста  $\rho_m$  не является нормальным. Локальная шкала роста  $\{\mu\}_k^0$  строится в этом случае как единая шкала роста по описанной выше процедуре, в которой в качестве модельной функции выбирается уже другая функция  $w$  (например,  $u_2 := u \circ u$ ), растущая медленнее функции  $u$ . При этом рост функции  $\varphi \in \{\varphi\}_m^0$  характеризуется уже *системой параметров роста*  $\rho_{k,m}$ ,  $k, m \in \mathbf{N}_0$  *второго уровня*, где  $\rho_{k,m}$  — порядок функции  $w_k \circ u_m \circ \varphi$  относительно функции  $w$ . Если потребуется, то описанный процесс можно продолжать далее неограниченно и переходить к системам параметров роста  $\rho_{k,m,\dots,n}$ ,  $k, m, \dots, n \in \mathbf{N}_0$  произвольного уровня.