

V Всероссийская научная конференция
«Осенние математические чтения в Адыгее»
к 85-летию Адыгейского государственного университета

**«О различных подходах
к решению математических задач»**

профессор Сергеев Игорь Николаевич
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

Октябрь 2025 г.

Вариативность подходов

Решая сложную или нестандартную задачу или проблему:

- можно использовать **подходы** разного **типа**:
от **алгебраического** или **логического**
до **функционального** или **графического**;
- можно пробовать также и **другие подходы**:
арифметический, комбинаторный, вероятностный, статистический, топологический и т.д. — в полном соответствии с существующими разнообразными **областями** математической науки;
- важно определиться, как именно **наиболее просто, но эффективно** подступиться к задаче:
 - то ли **преобразовать** выражение, **решив** уравнение, неравенство, ...;
 - то ли **порассуждать**, резко сократив выкладки;
 - то ли рассмотреть выражения как **функции** от конкретных переменных, используя их **свойства**, или **отобразить** объект;
 - то ли применить **графическую** иллюстрацию, **превратив** условие задачи в **наглядную** картинку и даже используя геометрию...

Пример вариативности

Пример. Если $n = 1$, то при любом $x \in \mathbb{R}$ выражения

$$1 - x^n \quad \text{и} \quad (1 - x)^n$$

совпадают. Докажите, что ни для каких $x \in (0, 1)$ и целых $n > 1$ эти они больше не совпадают.

Возможные подходы к этой задаче:

- алгебраический (буквы, выражения, преобразования, уравнения, неравенства, системы);
- логический (утверждения, рассуждения);
- функциональный (функции, их свойства);
- графический (геометрическая интерпретация, наглядная иллюстрация),

а также (и даже!):

- арифметический (счёт, действия с числами, доли, пропорции);
- вероятностный (случайные события, их вероятности)...

Пример вариативности

Пример (тот же). Если $n = 1$, то при любом $x \in \mathbb{R}$ выражения

$$1 - x^n \quad \text{и} \quad (1 - x)^n$$

совпадают. Докажите, что ни для каких $x \in (0, 1)$ и целых $n > 1$ эти они больше не совпадают.

Алгебраический подход (буквы и выкладки с ними).

Положим $y \equiv 1 - x$, тогда имеем

$$1 = x + y,$$

откуда получаем

$$1 = (x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \dots + nxy^{n-1} + y^n,$$

а значит, при $x \in (0, 1)$ и $n > 1$ имеем

$$y \in (0, 1)$$

и справедлива **цепочка**

$$1 - x^n = nx^{n-1}y + \dots + nxy^{n-1} + y^n > y^n = (1 - x)^n.$$

Пример вариативности

Пример (тот же). Если $n = 1$, то при любом $x \in \mathbb{R}$ выражения $1 - x^n$ и $(1 - x)^n$ совпадают. Докажите, что ни для каких $x \in (0, 1)$ и целых $n > 1$ эти они больше не совпадают.

Логический подход (математическая индукция).

1. **База** индукции $n = 1$: данные выражения равны друг другу.

2. Индуктивный **переход** $n \mapsto n + 1$:

если при $x \in (0, 1)$ и некотором $n \geq 1$ левое выражение хотя бы **не меньше** правого (**предположение индукции**), **то** при следующем значении n оно уже **строго больше** правого (**заключение индукции**), поскольку

$$1 - x^{n+1} > 1 - x^n \geq (1 - x)^n > (1 - x)^{n+1}.$$

Пример вариативности

Пример (тот же). Если $n = 1$, то при любом $x \in \mathbb{R}$ выражения

$$1 - x^n \quad \text{и} \quad (1 - x)^n$$

совпадают. Докажите, что ни для каких $x \in (0, 1)$ и целых $n > 1$ эти они больше не совпадают.

Функциональный подход (функции и их производные).

Каждая **функция**

$$f_x(n) \equiv (1 - x^n) - (1 - x)^n, \quad n \in \mathbb{R},$$

определяемая параметром $x \in (0, 1)$, имеет нулевое **начальное значение**

$$f_x(1) = 0,$$

и возрастает из-за положительности **производной**

$$f'_x(n) = 0 - x^n \ln x - (1 - x)^n \ln(1 - x) > 0$$

(так как оба логарифма **отрицательны**). Отсюда получаем

$$f_x(n) > f_x(1) = 0, \quad n > 1.$$

Пример вариативности

Пример (тот же). Если $n = 1$, то при любом $x \in \mathbb{R}$ выражения

$$1 - x^n \quad \text{и} \quad (1 - x)^n$$

совпадают. Докажите, что ни для каких $x \in (0, 1)$ и целых $n > 1$ эти они больше не совпадают.

Графический подход (графики функций).

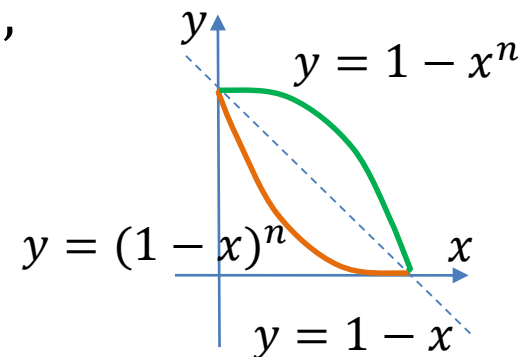
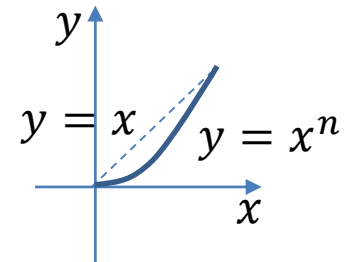
При $n > 1$, зная график функции

$$y = x^n, \quad x \in (0, 1),$$

построим **графики** двух функций

$$y = 1 - x^n, \quad y = (1 - x)^n, \quad x \in (0, 1),$$

откуда сразу **видно**, что первый лежит **строго выше** второго (т.к. они **выпуклы** наружу и **разделены** хордой $y = 1 - x$).



Пример вариативности

Пример (тот же). Если $n = 1$, то при любом $x \in \mathbb{R}$ выражения

$$1 - x^n \quad \text{и} \quad (1 - x)^n$$

совпадают. Докажите, что ни для каких $x \in (0, 1)$ и целых $n > 1$ эти они больше не совпадают.

Арифметический подход (сравнение долей).

Для каждого числа $x \in (0, 1)$ при каждом $n > 1$ справедлива цепочка

$$\begin{aligned} 1 - x^n &= 1 - x \cdot x^{n-1} > 1 - x > \\ &> (1 - x) \cdot (1 - x)^{n-1} = (1 - x)^n, \end{aligned}$$

так как любое **положительное** число в результате взятия от него только **части**, т.е. конкретно здесь — **при умножении** его на любое из чисел

$$x^{n-1}, (1 - x)^{n-1} \in (0, 1),$$

уменьшается.

Пример вариативности

Пример (тот же). Если $n = 1$, то при любом $x \in \mathbb{R}$ выражения

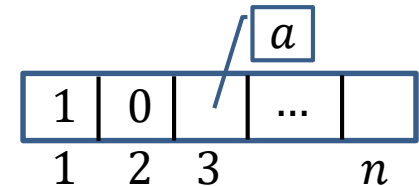
$$1 - x^n \quad \text{и} \quad (1 - x)^n$$

совпадают. Докажите, что ни для каких $x \in (0, 1)$ и целых $n > 1$ эти они больше не совпадают.

Вероятностный подход (стохастическая модель).

Пусть имеется полоса, состоящая из n клеток, в каждую из которых, **независимо** друг от друга, вставляется цифра:

- $a = 1$ — с **вероятностью** $x \in (0, 1)$;
- $a = 0$ — с **вероятностью** $1 - x$.



Тогда имеет место цепочка

$$1 - x^n = P_n(\exists a = 0) \geq P_n(\forall a = 0) = (1 - x)^n,$$

в которой **нестрогое** неравенство в случае $n = 1$ обращается в **равенство**, а в случае $n > 1$ уже оказывается **строгим**.

Арифметика, алгебра или круги Эйлера

Задача (та же). Блондины среди голубоглазых людей встречаются чаще, чем среди неголубоглазых. Верно ли, что голубоглазые среди блондинов встречаются чаще, чем среди неблондинов?

Алгебраический подход (преобразования неравенств).

Через x и y **обозначим** количества голубоглазых и неголубоглазых блондинов, а через u и v — количества голубоглазых и неголубоглазых неблондинов.

	Б	НБ
Г	$x = \begin{vmatrix} \text{Голубогл.} \\ \text{Блонд.} \end{vmatrix}$	$u = \begin{vmatrix} \text{Голубогл.} \\ \text{Неблонд.} \end{vmatrix}$
НГ	$y = \begin{vmatrix} \text{Неголубогл.} \\ \text{Блонд.} \end{vmatrix}$	$v = \begin{vmatrix} \text{Неголубогл.} \\ \text{Неблонд.} \end{vmatrix}$

Тогда данное в задаче **условие** — это **неравенство**

$$\frac{x}{x+u} > \frac{y}{y+v} \Leftrightarrow x(y+v) > y(x+u) \Leftrightarrow xv > uy,$$

а описанная в вопросе **гипотеза** — это **неравенство**

$$\frac{x}{x+y} > \frac{u}{u+v} \Leftrightarrow x(u+v) > u(x+y) \Leftrightarrow xv > uy,$$

которое, оказывается, попросту **эквивалентно** условию.

Арифметика, алгебра или круги Эйлера

Задача (Турнир городов). Блондины среди голубоглазых людей встречаются чаще, чем среди неголубоглазых. Верно ли, что голубоглазые среди блондинов встречаются чаще, чем среди неблондинов?

Графический подход (наглядная иллюстрация с арифметикой).

Мысленно **перекрасим** часть неголубоглазых людей в блондинов так, чтобы **доля** блондинов среди неголубоглазых совпала с их **долей** среди голубоглазых: см. пунктир **на рисунке** (где количество людей в каждом прямоугольнике пропорционально его площади, а площади прямоугольников с общей стороной относятся как их другие, необщие стороны).

Тогда доля голубоглазых среди блондинов **станет равной** их доле среди неблондинов, а значит, до перекрашивания она была **больше**, т.е. ответ: **да**.

Такой иллюстрацией легко убедить себя, однако её **трудно оформить** в виде строгого математического текста решения.

	Б	НБ
Г	Блонд. Голубогл.	Неблонд. Голубогл.
НГ	Блонд. Неголубогл.	Неблонд. Неголубогл.

Варианты логики

Задача (ПВГ). Найдите $f(2014)$, если верны равенства

$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Логический подход (вывод следствий).

Из условия **выводим** следующие 4 утверждения:

1) при $y = x$ **имеем**

$$f(0) = 2f(x) - 2x^2, \quad x \in \mathbb{R};$$

2) из 1) при $x = 0$ **имеем**

$$f(0) = 2f(0) - 0 \Rightarrow f(0) = 0;$$

3) из 1), 2) в итоге **имеем**

$$f(x) = x^2 + f(0)/2 = x^2, \quad x \in \mathbb{R};$$

4) из 3) при $x = 2014$ **имеем**

$$f(2014) = \mathbf{2014^2}.$$

Варианты логики

Задача (ЕГЭ). Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Логический подход (односторонние рассуждения).

1. Следствие: если (x, y) — решение, то $(-x, -y)$, (y, x) , $(-y, -x)$ — тоже, а значит, если решений меньше 4, то

$$xy = 0 \quad \text{или} \quad x = \pm y \quad (\Leftrightarrow (x \pm y)^2 = 0).$$

2. Вывод: если решений ровно 2, то

$$a^2 - 3a = 0, \pm a^2/2 \Rightarrow a = 0, 2, 3, 6.$$

3. Проверка:

- 1) если $a = 0$, то $(x, y) = (0, 0)$ — 1 решение;
- 2) если $a = 2$, то $(x, y) = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ — 2 решения;
- 3) если $a = 3$, то $(x, y) = (\pm 3, 0), (0, \pm 3)$ — 4 решения;
- 4) если $a = 6$, то $(x, y) = \pm(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ — 2 решения.

Варианты логики

Задача (ЕГЭ). Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Алгебраически-функционально-логический подход (преобразования, отображения и рассуждения). Имеем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a^2 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 3a^2 - 6a \\ (x-y)^2 = -a^2 + 6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \pm\sqrt{3a(a-2)} \\ v = \pm\sqrt{-a(a-6)}, \end{cases}$$

где замена $\begin{cases} u \equiv x+y \\ v \equiv x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}$ задаёт взаимно-однозначное

(функционально-логически!) соответствие между парами (x, y) и (u, v) .

Поэтому число пар (u, v) равно 2 тогда и только тогда, когда

$$3a(a-2) = 0 < -a(a-6) \quad \text{или} \quad 3a(a-2) > 0 = -a(a-6),$$

т.е. когда $a = 2, 6$.

Варианты логики

Задача (ДВИ). Верно ли, что если функция $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $f(0) = 1$, а ещё при всех $n \in \mathbb{Z}$ — равенствам

$$f(n) = f(n-1) \cdot \cos 1 - \sin(n-1) \cdot \sin 1, \quad (*)$$

то и неравенствам $f(n) > -1$?

Логический подход (существование и единственность).

1. Функция $f(n) \equiv \cos n$ **удовлетворяет** всем требованиям задачи.
2. Функция f требованиями задачи определяется **однозначно**, так как её значение при $n = 0$ задано, а при каждом следующем и каждом предыдущем значении n вычисляется по формуле $(*)$ (в которой $\cos 1 \neq 0$).
3. Все неравенства $\cos n > -1$ **верны**, так как **в противном случае** при некоторых $n, k \in \mathbb{Z}$ выполнялось бы следующее

$$\cos n = -1 \Rightarrow n = \pi + 2k\pi \Rightarrow \pi = \frac{n}{1+2k} \in \mathbb{Q},$$

что **неверно** (ведь π — **иррационально!**).

Варианты логики

Задача (Ломоносов). При каждом $n \in \mathbb{N}$ тело Φ_n в координатном пространстве задаётся неравенством

$$|x|^n + 3|y|^n + |5z|^n < 1. \quad (*)$$

Найдите объём тела Φ , являющегося объединением всех тел Φ_n .

Логический подход (логика объединения и односторонние выводы).

Для того, чтобы точка (x, y, z) принадлежала телу Φ :

а) **необходимо и достаточно** существование $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего неравенству $(*)$;

б) **необходимо**

$$|x|, |y|, |5z| < 1, \quad (**)$$

иначе неравенство $(*)$ не верно ни при каком $n \in \mathbb{N}$;

в) **достаточно** $(**)$, поскольку тогда при **огромном** $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|x|^n, 3|y|^n, |5z|^n < \frac{1}{3} \Rightarrow (*).$$

Таким образом, Φ — прямоугольный **параллелепипед** объёмом

$$V(\Phi) = (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5}.$$

Свойства функций

Задача (Ломоносов). Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Функциональный подход (наименьшее значение функции).

Уравнение переписывается в виде

$$f(x) = 0,$$

где функция

$$f(x) \equiv 9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a||, \quad t \in \mathbb{R},$$

возрастает при $x \geq 1$ и **убывает** при $x \leq 1$ (так как знак коэффициента при x , равного $\pm 9 - 4 \pm 3 \pm 1$, зависит только от знака у первого слагаемого и меняется только в точке $x = 1$), а при удалении x от 1 **неограниченно** растёт. Поэтому уравнение имеет корень тогда и только тогда, когда

$$f(1) \leq 0 \Leftrightarrow -4 + |3 - |1 + a|| < 0$$

$$\Leftrightarrow -4 < |1 + a| - 3 < 4 \Leftrightarrow -1 < |1 + a| < 7$$

$$\Leftrightarrow -7 < 1 + a < 7 \Leftrightarrow -8 \leq a \leq 6.$$

Свойства функций

Задача (ЕГЭ). Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$$

имеет хотя бы один корень.

Функциональный подход (монотонность и область значений функции). Уравнение переписывается в виде

$$f(\sin^2 x) = f(3 \sin x - a),$$

где функция

$$f(t) \equiv t^7 + t, \quad t \in \mathbb{R},$$

строго возрастает, а значит, принимает каждое своё значение ровно в одной точке. Поэтому уравнение равносильно следующему

$$\sin^2 x = 3 \sin x - a \Leftrightarrow g(\sin x) = -a,$$

где область значений функции

$$g(s) \equiv s^2 - 3s = (s - 1,5)^2 - 2,25, \quad s \equiv \sin x \in [-1, 1],$$

убывающей от $g(-1) = 4$ до $g(1) = -2$, есть $E(g) = [-2, 4]$.

Таким образом, уравнение имеет корни в точности, когда

$$-2 \leq -a \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 2.$$

Алгебра и свойства функций

Задача (ПВГ). Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{5-\sqrt{15}}(12 + 2x - x^2).$$

Алгебраически-функционально-логический подход
(замена, монотонность, угадывание). **Обозначив**

$$y \equiv x^2 - 2x - 2 \quad (\Rightarrow 12 + 2x - x^2 = 10 - y),$$

запишем уравнение в виде

$$\log_{5+\sqrt{15}} y = \log_{5-\sqrt{15}}(10 - y).$$

Поскольку $5 \pm \sqrt{15} > 1$, то левая часть **возрастает** (по y), а правая — **убывает**, а значит, корней **не более одного**. С учётом чудесного совпадения

$$10 - (5 + \sqrt{15}) = (5 - \sqrt{15}),$$

этот корень **угадывается**: $y = 5 + \sqrt{15}$. Поэтому имеем

$$x^2 - 2x - 2 = 5 + \sqrt{15} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \mathbf{-7 - \sqrt{15}}$$

(причём корни $x_{1,2}$ **существуют**, так как $-7 - \sqrt{15} < 0$).

Логика и свойства функций

Задача (ЕГЭ). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2|$$

меньше -2 .

Логически-функциональный подход (логика минимума).

Минимум данной ломаной параболы может приниматься **только** в её точках излома $(x - 2)(x + 1) = 0$ или в вершине (при $x^2 - x - 2 \geq 0$), поэтому требование задачи **равносильно** совокупности

$$f(2) < -2, \quad f(-1) < -2, \quad f\left(\frac{1-a}{2}\right) < -2.$$

Первое условие не реализуется ($2a - 2a - 1 < -2$), **второе** даёт $-a - 2a - 1 < -2 \Leftrightarrow a > 1/3$, а **третье в случае (!)** $a \leq 1/3$ даёт $|a^2 - 9| < 2a^2 + 6a - 4 \Leftrightarrow -2a^2 - 6a + 4 < a^2 - 9 < 2a^2 + 6a - 4$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a+5) > 0 \\ g(a) \equiv 3a^2 + 6a - 13 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -5,$

ибо $g(-5) > 0 > g(-1), g(1/3)$. Итак, **ответ: $a > 1/3, a < -5$.**

Применение алгебры

Задача (Ломоносов). Под каким углом из начала координат видно множество, задаваемое на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0?$$

Алгебраический подход (аналитическая модель в геометрии).

Найдём все значения $k \equiv \operatorname{tg} \varphi$ для каждого из которых **прямая** $y = kx$ **пересекается** с данным множеством, т.е. неравенство

$$\begin{aligned} 14x^2 + x \cdot kx + (kx)^2 + 14x + 2 \cdot kx + 4 &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (k^2 + k + 14)x^2 + 2(k + 7)x + 4 &< 0 \end{aligned}$$

имеет решение. Такие значения k — те, что удовлетворяют условию

$$(k + 7)^2 > 4(k^2 + k + 14) \Leftrightarrow (k - 1)(3k - 7) < 0,$$

т.е.

$$1 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow 1 < \operatorname{tg} \varphi < \frac{7}{3}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Учитывая, что данное множество не имеет точек ни **на оси ординат** ($x = 0$), ни **в первой четверти** ($x, y > 0$), получаем, что оно лежит целиком **внутри третьей четверти**, откуда находим **ответ**:

$$\pi + \frac{\pi}{4} < \varphi < \pi + \operatorname{arctg} \frac{7}{3} \Rightarrow \Delta\varphi = \operatorname{arctg} \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

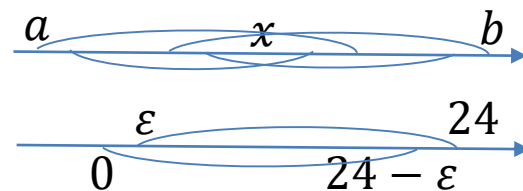
Графическая иллюстрация

Задача (Ломоносов). Для охраны объекта в течение суток заказчику подадут несколько временных отрезков дежурств (с оплатой 1 т.р./ч) при условии, что их объединение составит в точности сутки, а он сможет откинуть часть отрезков при сохранении того же условия. Какую наименьшую сумму он должен подготовить заранее для оплаты дежурств?

Графический подход (числовая ось).

1. **Двойной** оплаты (**48 т.р.**) точно хватит, так как из конечного покрытия отрезками можно выбрать не более чем двойное — если точка x покрыта более чем 2 отрезками, то оставим только 2 из них: с самым левым a и самым правым b концами.

2. **Меньшей** суммы может не хватить: если, к примеру, будет всего 2 отрезка $[\varepsilon, 24]$ и $[0, 24 - \varepsilon]$ (см. рис.), то никакой 1 из них уже не удовлетворяет условию, а с убыванием числа ε к 0 их сумма сходится к $24 + 24 = \mathbf{48}$.



Графическая иллюстрация

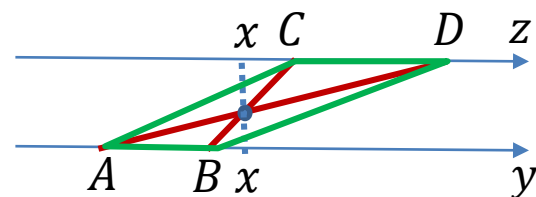
Задача (Ломоносов). Верно ли, что для любых различных чисел $A < B$ и $C < D$ обязательно найдётся число x , лежащее и строго между A, D , и строго между B, C ?

Графический подход (перебор на числовой оси или ее раздвоение).

1. **Перебрать** 6 случаев 4 точек на 1 оси.
2. **Отметить** пары точек A, B и C, D на **2 разных горизонтальных осях** (с координатами y и z).

Тогда $ACDB$ — выпуклый 4-угольник (трапеция или даже параллелограмм), а его диагонали AD и BC пересекаются в точке, лежащей непременно как между A и D , так и между B и C .

Следовательно, **ответ** на поставленный в задаче вопрос — **да**.



Графическая иллюстрация

Задача (Ломоносов). Из пункта А в пункт В выехал велосипедист, а через некоторое время из В в А вышел пешеход. Велосипедист прибыл в В через 6 ч после выхода оттуда пешехода, а пешеход в А — через 9 ч после выезда оттуда велосипедиста, причем их скорости были постоянными. Какую долю своего пути проехал велосипедист до встречи с пешеходом?

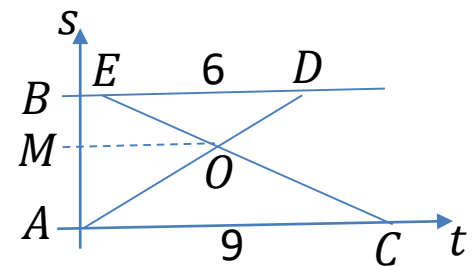
Графический подход (применение планиметрии).

В координатах Ots построим графики движения велосипедиста и пешехода. Они образуют в пересечении **подобные треугольники** $\triangle ACO \sim \triangle DEO$ с коэффициентом подобия

$$AM : MB = AC : DE = 9 : 6 = 3 : 2.$$

Значит, **ответ** таков:

$$AM : AB = 3 : (3 + 2) = \mathbf{3 : 5}.$$



Графическая иллюстрация

Задача (ПВГ). Найдите все значения a , при каждом из которых ни одно значение x , удовлетворяющее неравенству

$$\log_2(|x| + |a|) \leq 2,$$

не удовлетворяет неравенству

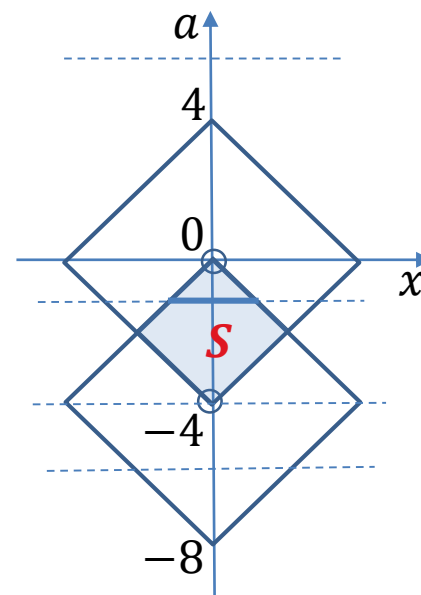
$$\log_{1/2}(|x| + |a + 4|) \geq -2.$$

Графический подход (параметр как отдельная координата).

Задача сводится к вопросу о том, при каких значениях a система

$$\begin{cases} 0 < |x| + |a| \leq 4 \\ 0 < |x| + |a + 4| \leq 4, \end{cases}$$

задающая на плоскости **с координатами** (x, a) пересечение S двух одинаковых квадратов со своими **внутренностями**, но **выколотыми** центрами, не имеет решений относительно x . Иными словами, какие прямые вида $a = \text{const}$ **не пересекают** множество S ? — **Глядя** на рисунок, **ответ** можно дать **такой**: $a \notin (-4, 0)$.



Графическая иллюстрация

Задача (Ломоносов). Сколько решений на отрезке $[0, \pi]$ имеет уравнение

$$5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2|?$$

Графический подход (окружность в плоскости).

Запишем исходное уравнение в виде

$$\sin x = |\cos x + 0,4| - 0,8 \Leftrightarrow s = f(c),$$

где обозначено

$$f(c) \equiv |c + 0,4| - 0,8, \quad s \equiv \sin x, \quad c \equiv \cos x,$$

причём число корней этого уравнения на отрезке $[0, \pi]$ равно числу точек пересечения **графика**

функции $s = f(c)$, $c \in \mathbb{R}$,

с верхней полуокружностью

тригонометрической окружности,

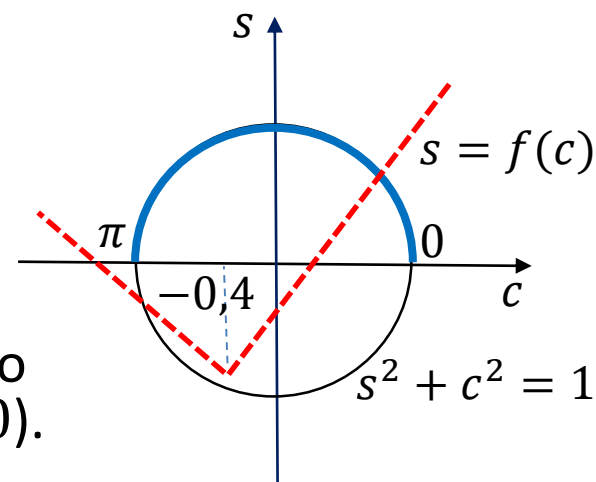
задаваемой здесь уравнением

$s^2 + c^2 = 1$. С учётом оценок

$$f(-1), f(-0,4), f(0) < 0 < f(1),$$

делаем вывод, что точка пересечения ровно

одна (из-за разной монотонности при $c \geq 0$).



Графическое решение

Задача (ДВИ). В треугольнике ABC со стороной $AB = 2\sqrt{3}$ медианы AM и BN пересекаются в точке K . Найдите длину медианы CL , если четырехугольник $CMKN$ — вписанный.

Подходы: функциональный (гомотетия) или логический (следствия).

Лучшее решение с гомотетией: треугольники ABC и NMC гомотетичны с коэффициентом 2 и центром C . Обозначив медиану $CL \equiv x$, имеем

$$CD = 2CK = 2 \cdot \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LD = CD - CL = \frac{4}{3}x - x = \frac{x}{3}.$$

По теореме о пересекающихся хордах

$$CL \cdot LD = AL \cdot LB \Rightarrow$$

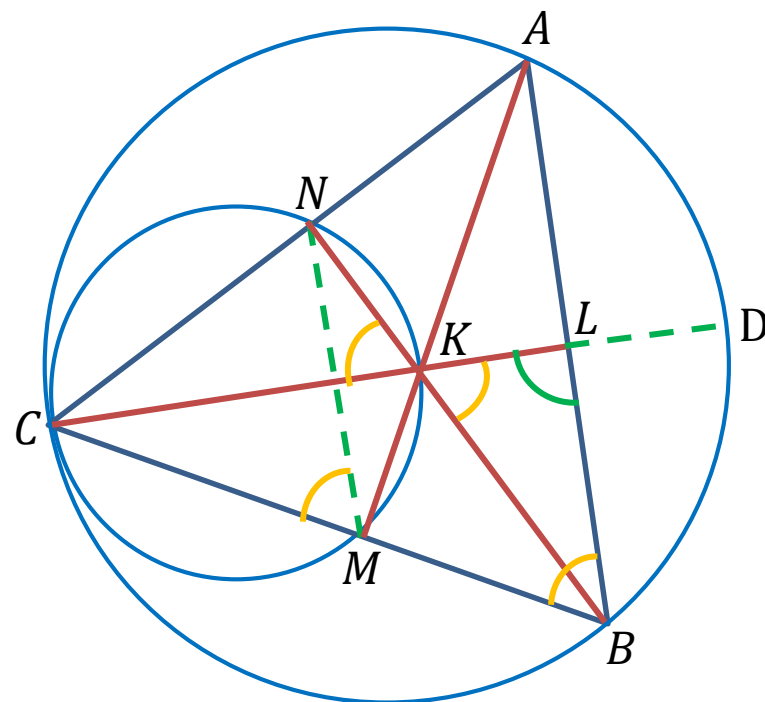
$$\Rightarrow x \cdot \frac{x}{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow x = 3.$$

Другое решение из подобия

(по 2 углам, в лоб по рис.):

$$\triangle LBK \sim \triangle LCB \Rightarrow LB:LK = LC:LB \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} : \frac{x}{3} = x : \sqrt{3} \Rightarrow x = 3.$$



Вариативность подходов

Подведём некоторые итоги и сделаем выводы:

- какой именно подход лучше применить — зависит от конкретной **ситуации**, от формы **отчётности** по данной задаче и даже от **технических** возможностей записи решения (письменный или устный экзамен, разработка гипотезы ответа, научная статья);
- во многих задачах применяется (как правило, неявно) сразу **комплекс переплетающихся** друг с другом подходов: некоторые из них играют **ключевую** роль (**ключики!**), а остальные — лишь **вспомогательную**;
- в подходе каждого типа можно выделить огромное множество самых разнообразных **методов и приёмов**, предварительное знакомство с которыми позволяет **расширить возможности** по решению задач с помощью этого подхода или **повысить квалификацию** в данной области.

Спасибо за внимание!

Если что — мой электронный адрес
igniserg@gmail.com