

Исследование вопроса эквивалентности компактных конфигураций в модели Trash Compaction

Степанов Иван, Московский физико-технический институт

Научный руководитель: Мусатов Даниил Владимирович

План

- Постановка задачи
- Известные результаты
- Цели и задачи
- Результаты
- Дальнейшие направления исследований

Постановка исходной задачи

- Бесконечная клетчатая доска, монетки в клетках

Постановка исходной задачи

- Бесконечная клетчатая доска, монетки в клетках
- 4 вида операций

Постановка исходной задачи

- Бесконечная клетчатая доска, монетки в клетках
- 4 вида операций

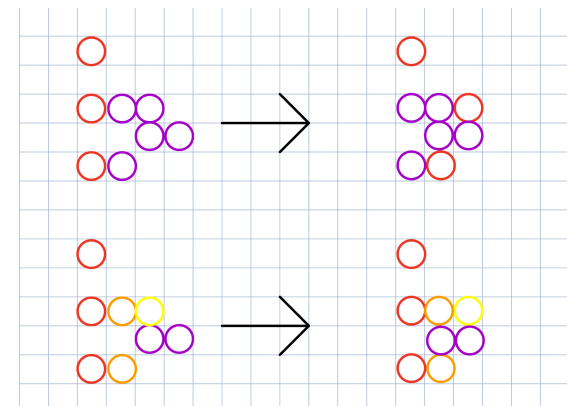


Рис 1. Пример применения сдвига вправо

Постановка исходной задачи

- Бесконечная клетчатая доска, монетки в клетках
- 4 вида операций

- Прямоугольник в конце

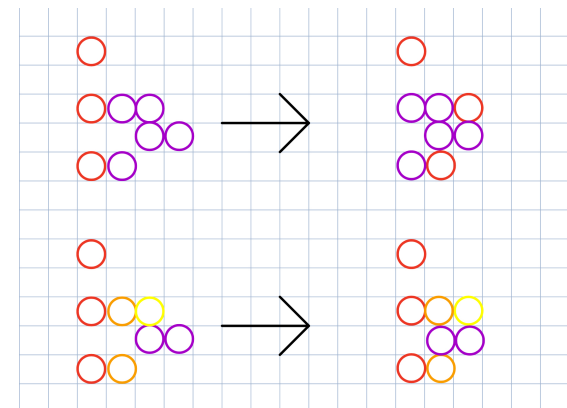


Рис 1. Пример применения сдвига вправо

Известные результаты

- NP-трудность исходной задачи

Известные результаты

- NP-трудность исходной задачи
- Каноничные и компактные конфигурации

Известные результаты

- NP-трудность исходной задачи
- Каноничные и компактные конфигурации
- Классы эквивалентности

Известные результаты

- NP-трудность исходной задачи
- Каноничные и компактные конфигурации
- Классы эквивалентности

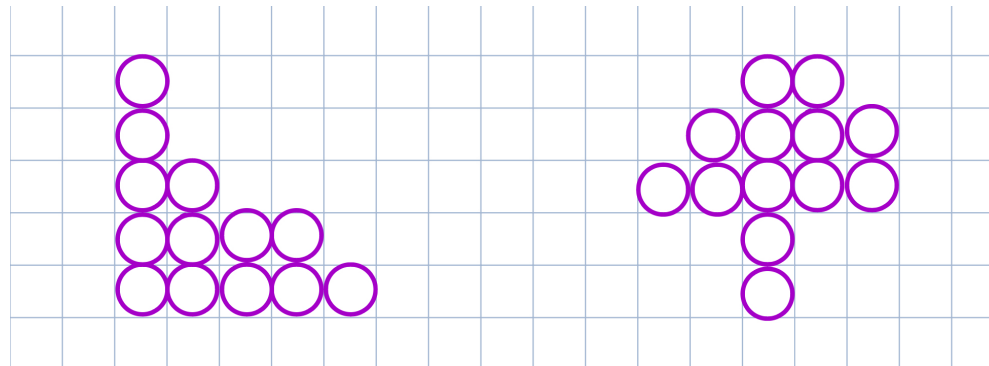


Рис 2. Пример канонической и компактной конфигурации

Постановка обобщенной задачи

- Для каждой конфигурации P определим $\Omega(P)$ как множество всех достижимых классов эквивалентности
- Необходимо проверить для конкретного класса $\mathcal{K}$ принадлежность к $\Omega(P_0)$.
- Само $\Omega(P_0)$ может быть экспоненциально большим по сравнению с числом монет

Свойство вкладываемости

- Конфигурация обладает *вкладываемостью строк* если проекция каждой строки r на другую строку r' не меньшей длины содержится в r' .

Свойство вкладываемости

- Конфигурация обладает *вкладываемостью строк* если проекция каждой строки r на другую строку r' не меньшей длины содержится в r'
- Компактность = (непрерывность + вкладываемость) строк и столбцов

Свойство вкладываемости

- Конфигурация обладает вкладываемостью строк если проекция каждой строки r на другую строку r' не меньшей длины содержится в r'
- Компактность = (непрерывность + вкладываемость) строк и столбцов
- Вкладываемость строк = вкладываемости столбцов

Свойство вкладываемости

- Конфигурация обладает вкладываемостью строк если проекция каждой строки r на другую строку r' не меньшей длины содержится в r'
- Компактность = (непрерывность + вкладываемость) строк и столбцов
- Вкладываемость строк = вкладываемости столбцов
- Наследуемость свойства вкладываемости

Свойство вкладываемости

- Конфигурация обладает вкладываемостью строк если проекция каждой строки r на другую строку r' не меньшей длины содержится в r'
- Компактность = (непрерывность + вкладываемость) строк и столбцов
- Вкладываемость строк = вкладываемости столбцов
- Наследуемость свойства вкладываемости
- Инвариант набора длин строк

Критерий вкладываемости

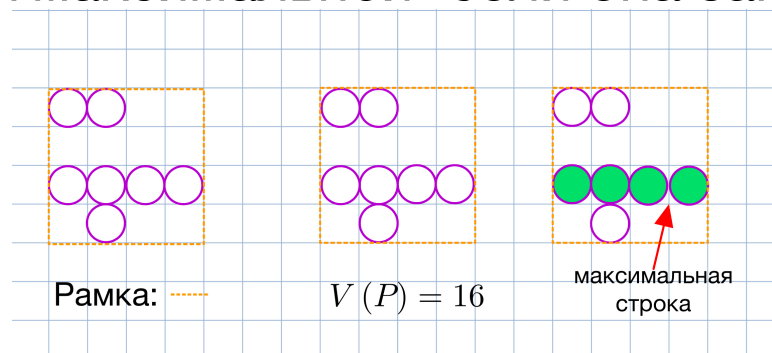
Лемма: P_0 обладает свойством вкладываемости тогда и только тогда, когда $|\Omega(P_0)| = 1$.

Определения

- *Рамкой* конфигурации P будем называть минимальный по включению прямоугольник, содержащий P
- *Объемом* конфигурации P будем называть количество клеток в ее рамке и обозначать как $V(P)$
- Строка r называется *максимальной* если она занимает всю длину рамки

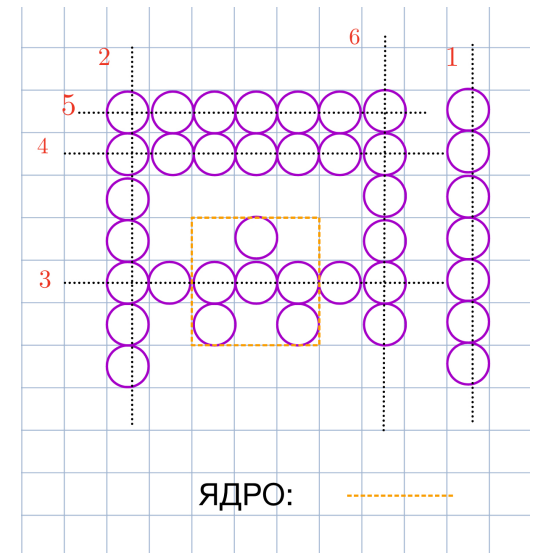
Определения

- *Рамкой* конфигурации P будем называть минимальный по включению прямоугольник, содержащий P .
- *Объемом* конфигурации P будем называть количество клеток в ее рамке и обозначать как $V(P)$.
- Строка r называется *максимальной* если она занимает всю длину рамки



Ядро конфигурации

- *Ядром* конфигурации P_0 будем называть конфигурацию P , полученную итеративным вырезанием максимальных строк и столбцов
- Все строки и столбцы, не входящие в ядро, назовем *псевдомаксимальными*



Принадлежность к NP

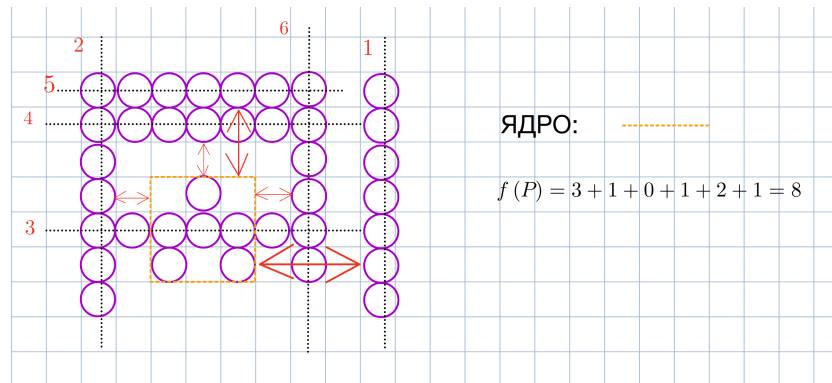
Первый шаг

- **Утверждение:** Ядро конфигурации не может увеличиваться в объеме при операциях. Более того, объем строго уменьшается, если операция повлияла на ядро.

Принадлежность к NP

Второй шаг

- $f(P)$ — суммарное расстояние от псевдомаксимальных элементов до ядра
- **Утверждение:** Пусть две конфигурации P_1, P_2 имеют одинаковое ядро, а $f(P_1) = f(P_2)$. Тогда, если P_2 достижима из P_1 , то она достижима за полиномиальное число операций (относительно размеров рамки).



Принадлежность к NP

Финальный шаг

- Объем ядра — полуинвариант полиномиального размера
- Полиномиальность операций для уменьшения объема ядра
- Отсутствие ядра — однозначность класса
- Последовательность конфигураций — необходимый сертификат!

Дальнейшие исследования

Основная Гипотеза

Пусть P_0 — произвольная конфигурация. Пусть P'_0 — конфигурация, полученная из P_0 путем добавления пустой строки φ . И пусть:

- 1) $\{\alpha'_i\}$ — последовательность операций, приводящих P'_0 к компактной конфигурации из класса K_0 . Тогда существует последовательность операций $\{\alpha_i\}$, приводящих P_0 к компактной конфигурации этого же класса
- 2) $\{\alpha_i\}$ — последовательность операций, приводящих P_0 к компактной конфигурации из класса K_0 . Тогда существует последовательность операций $\{\alpha'_i\}$, приводящих P'_0 к компактной конфигурации этого же класса

Дальнейшие исследования

Основная Гипотеза

Пусть P_0 — произвольная конфигурация. Пусть P'_0 — конфигурация, полученная из P_0 путем добавления пустой строки φ . И пусть:

- 1) $\{\alpha'_i\}$ — последовательность операций, приводящих P'_0 к компактной конфигурации из класса K_0 . Тогда существует последовательность операций $\{\alpha_i\}$, приводящих P_0 к компактной конфигурации этого же класса
- 2) $\{\alpha_i\}$ — последовательность операций, приводящих P_0 к компактной конфигурации из класса K_0 . Тогда существует последовательность операций $\{\alpha'_i\}$, приводящих P'_0 к компактной конфигурации этого же класса

Следствие: В формулировку исходной задачи можно добавить еще 4 типа операций: добавление/удаление пустой строки/столбца. При этом задача не поменяется.

Текущие продвижения в гипотезе

- Отсутствие контрпримера для определенных $\{\alpha_i\}$
- Отсутствие «простого» контрпримера в общем виде

Дальнейшие исследования

Вариации и обобщения задачи

- Увеличение размерности задачи
- Переход к другим формам клеток

Спасибо за внимание!