

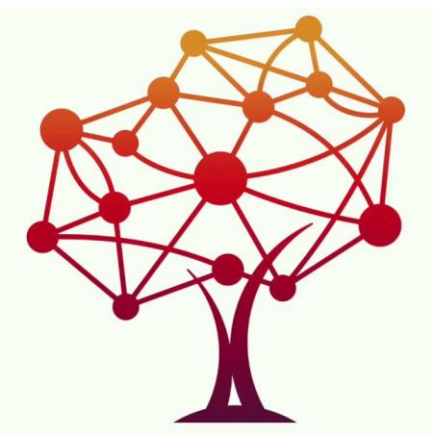
ОСЕННИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ В АДЫГЕЕ

(09-12 октября 2025 года, г. Майкоп)

Некоторые аспекты автоколебаний источников микросейсм, представленные математической моделью гликолиза Селькова

Дамир Салихович Ушхо

Вячеслав Бесланович Тлячев



Землетрясение произошло в Краснодарском крае в районе Хадыженска

Толчки ощутили в том числе жители Адыгеи

9 сентября 2025, 20:19



Землетрясение было в Апшеронском районе

Источник: Emsc-csem.org

В Краснодарском крае 9 сентября около 20:00 произошло землетрясение в Апшеронском районе в 10–12 километрах от Хадыженска. По данным немецкого исследовательского центра геонаук, магнитуда составила 4,5, а глубина – 10 километров.

Эмиль Вихерт

нем. *Emil Wiechert*



26 декабря 1861 — 19 марта 1928

Независимо от Дж. Дж. Томсона открыл электрон.
Независимо от Дж. Стокса построил теорию рентген-лучей.
Автор передовых исследований сейсмических волн.
Основатель немецкого геофизического общества.

Альфред-Мари Лъенар

фр. *Alfred-Marie Liénard*



2 апреля 1869 — 29 апреля 1958

Уравнение Лъенара — основополагающее в теории колебаний.
Был президентом Французского математического общества.

Физикам известны Э. Вихерт в паре с А.-М. Лъенаром по математическому выражению для потенциалов электромагнитного поля, названного их именем (потенциалы Лиенара—Вихерта). Эти потенциалы в основе расчетов по классической теории излучения движущихся зарядов.

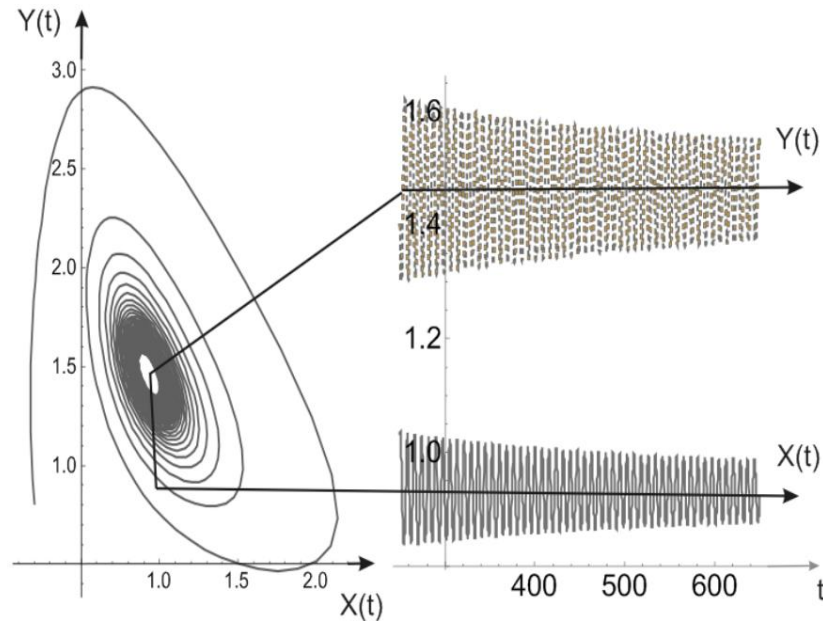
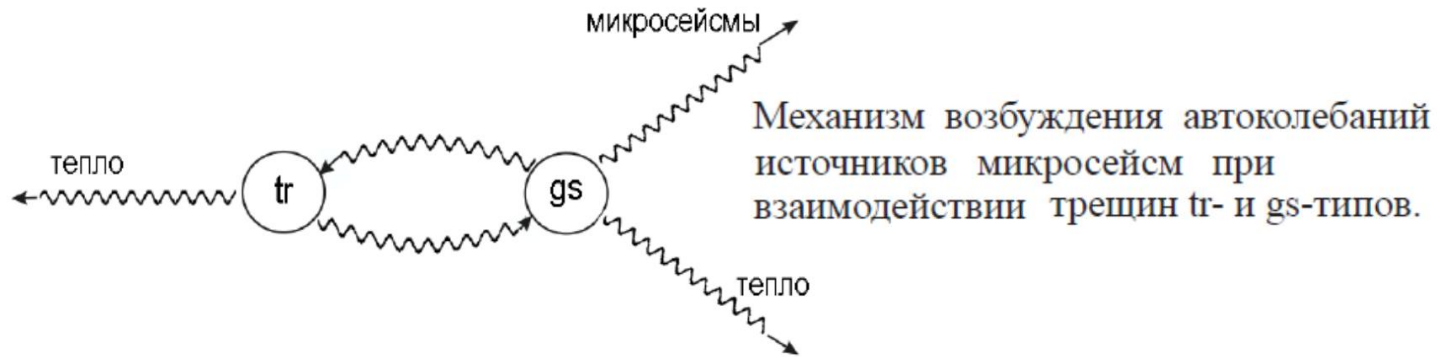
Мотивация

Люди всегда строили города и поселки в речных долинах. Сегодня с позиций неотектоники и геодинамики понятна роль динамических природных систем. А речные долины, расположенные на платформах, молодых плитах и в зонах коллизии плит - яркий пример свидетельств динамических нагрузок на структурно-неустойчивые основания. Например, **земная поверхность Москвы два раза в сутки колеблется под действием солнечно-лунных гравитационных сил. Их амплитуда составляет в смещениях примерно 1 метр.** Гигантские тектонические волны, обнаруживаемые только со спутников, со скоростью 300 км/год «массируют» земную кору.

Микросейсмы (микро + греч. seismos — землетрясение) — колебания земной поверхности малой амплитуды, вызываемые прохождением физическими процессами различного происхождения.

Маковецкий В.И., Дудченко И.П., Закупин А.С. (2017). *Геосистемы переходных зон*. 1(4): 37–46. Журнал Института морской геологии и геофизики Дальневосточного отделения РАН, Южно-Сахалинск

Мотивация



Фазовая плоскость и колебания концентраций затравочных tr-трещин $X(t)$ и gs-трещин, порождающих микросейсмы, $Y(t)$.

$$\begin{cases} \frac{dX(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{T}X(\tau) + \left[\frac{1}{T_A}Y[\tau] + \frac{1}{T_B}X^2(\tau)Y(\tau) \right]; \\ \frac{dY(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{T_V} - \left[\frac{1}{T_A}Y[\tau] + \frac{1}{T_B}X^2(\tau)Y(\tau) \right]. \end{cases}$$

X – зависящая от времени концентрация трещин относительно небольшой длины, которые считаются инициаторами роста, триггерами для более крупных трещин, обозначаются как tr-трещины;

Y – концентрация относительно крупных трещин, генерирующих сигналы микросейсм (gs-трещины).

В системе τ – текущее время, переменные $X(\tau)$ и $Y(\tau)$ – безразмерные концентрации tr- и gs-трещин.

Модель содержит четыре задаваемых параметра:

$$T, \tau_A, \tau_B, \tau_V$$

Маковецкий В.И., Дудченко И.П., Закупин А.С. (2017). *Геосистемы переходных зон*. 1(4): 37–46.

Постановка задачи

Автоколебания источников микросейсм можно описать моделью гликолиза Селькова. В безразмерных величинах в виде автономной системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + ay + bx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = c - ay - bx^2y, \end{cases} \quad (1)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $x(t)$ – величина, представляющая собой концентрацию трещин небольшой длины, которые являются источниками роста более крупных трещин; $y(t)$ – концентрация сравнительно крупных трещин, которые формируют сигналы микросейсм.

Для системы (1) точка $F\left(c; \frac{c}{a+bc^2}\right)$ в ограниченной части фазовой плоскости является состоянием равновесия. При переносе начала координат в точку F система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{bc^2 - a}{a + bc^2}x + (a + bc^2)y + \frac{bc}{a + bc^2}x^2 + 2bcxy + bx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-2bc^2}{a + bc^2}x - (a + bc^2)y - \frac{bc}{a + bc^2}x^2 - 2bcxy - bx^2y. \end{cases} \quad (2)$$

Постановка задачи и решение

Задача состоит в том, чтобы основываясь на преобразованиях Пуанкаре исследовать поведение траекторий системы (1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости в целях установления характера их расположения в ограниченной части плоскости. Результаты такого подхода, а также известные используются в качестве инструмента для решения проблемы центра-фокуса применительно к состоянию равновесия F , а также доказательства существования предельного цикла вокруг F .

Преобразование Пуанкаре вида $\{x = 1/z, y = u/z\}$ переводит систему (1) в систему вида:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -bu - bu^2 + (1-a)uz^2 + cz^3 - au^2z^2 \equiv P(u, z), \\ \frac{dz}{dt} = -buz + z^3 - auz^3 \equiv Q(u, z). \end{cases} \quad (3)$$

Состояниями равновесия системы (3) при условии $z = 0$ являются точки:

$$W_1(u = 0; z = 0), \quad W_2(u = -1; z = 0).$$

Переход к новым координатам с помощью формул $\{x = v/z, y = 1/z\}$ позволяет перевести систему (1) в систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = bv^2 + az^2 + bv^3 + (a-1)vz^2 - cvz^3, \\ \frac{dz}{dt} = bv^2z + az^3 - cz^4. \end{cases} \quad (4)$$

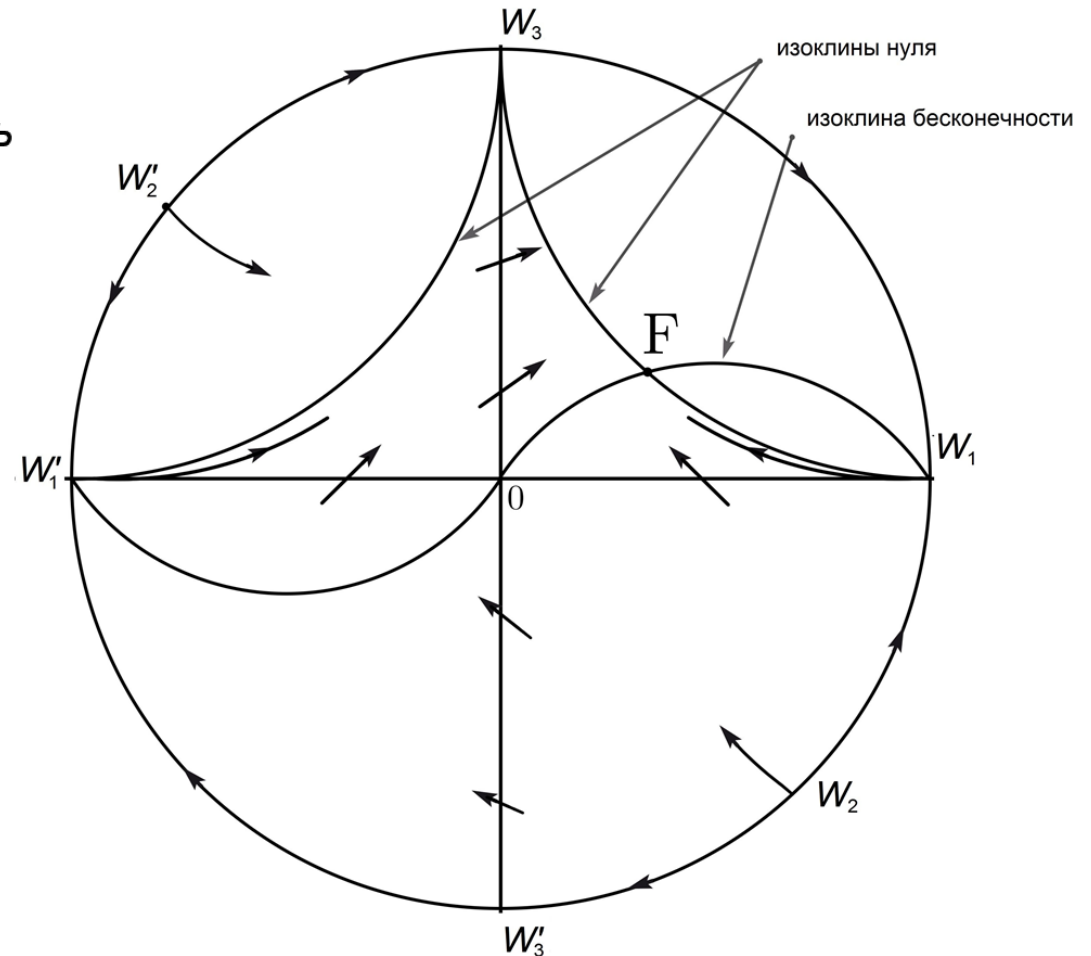
Система (4), полученная из системы (1) рассматривается только с целью установления характера состояния равновесия (0;0).

Результаты

Теорема 1. Если $c \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$, то система (1) имеет на экваторе сферы Пуанкаре три состояния равновесия: $W_1(u = 0, z = 0)$ – сложное (топологическое) седло, окрестность которого состоит из четырех гиперболических секторов, $W_2(u = -1, z = 0)$ – простой неустойчивый узел, $W_3(v = 0, z = 0)$ – сложное состояние равновесия, окрестность которого состоит из двух гиперболических секторов.

На рисунке 1 изображены состояния равновесия, изоклины нуля и бесконечности.

Рис. 1.



Результаты

Теорема 2. Если $0 < a < 1/8$, $c \in (c_1, c_2)$, то в ограниченной части фазовой плоскости система (1) имеет простой неустойчивый узел или фокус, окруженный хотя бы одним устойчивым предельным циклом.

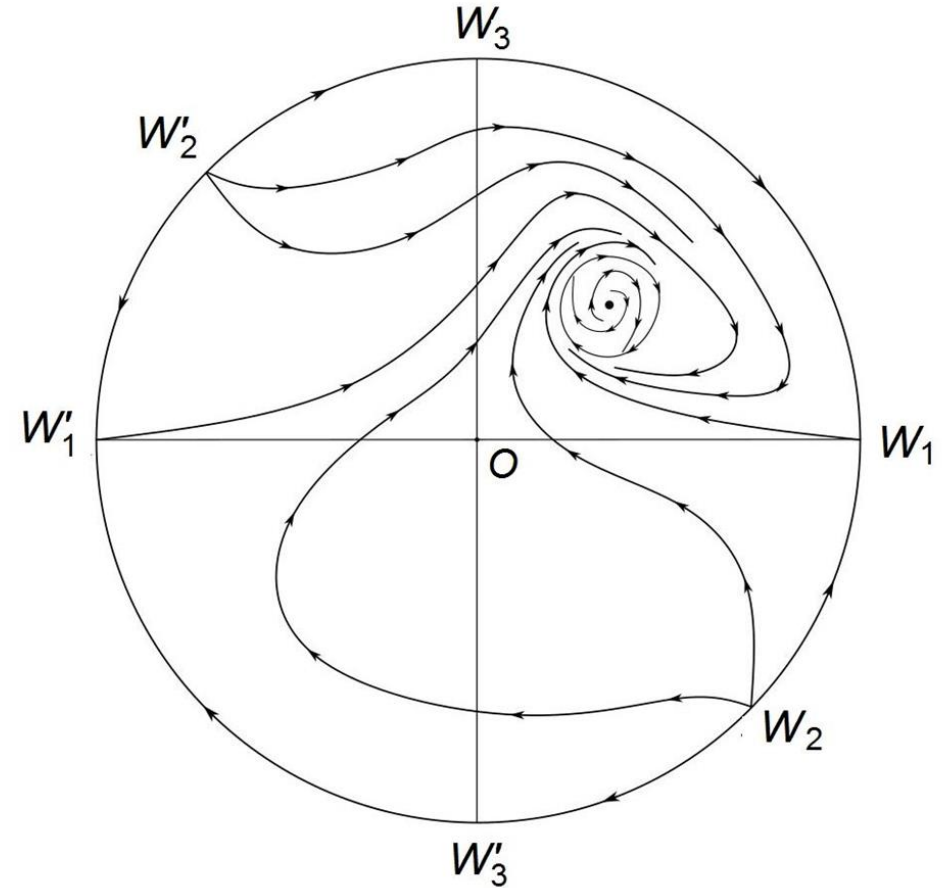


Рис. 2. Расположение траекторий системы (1) в круге Пуанкаре, то есть на всей фазовой плоскости

Заключение

В результате исследования выяснилось:

1) утверждение авторов [1] о том, что система (6) [1], а в нашем случае система (1) может иметь два состояния равновесия, ошибочно. Изменение параметра ν (см. (6) [1]), а в данной работе параметра c , приводит только лишь к изменению местоположения единственного состояния равновесия в ограниченной части фазовой плоскости;

2) на рис. 2 статьи [1] траектория пересекает ось концентраций tr –трещин дважды, что невозможно в силу трансверсальности оси OX для траекторий системы;

3) в формуле (18) статьи [1] имеется неточность, правильное ее написание таково:

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a}}{b}}.$$

[1]. Маковецкий В.И., Дудченко И.П., Закупин А.С. 2017. Автоколебательная модель источников микросейсм // Геосистемы переходных зон. 1(4): 37–46. <https://doi.org/10.30730/2541-8912.2017.1.4.037-046>

Список литературы использованной в исследовании

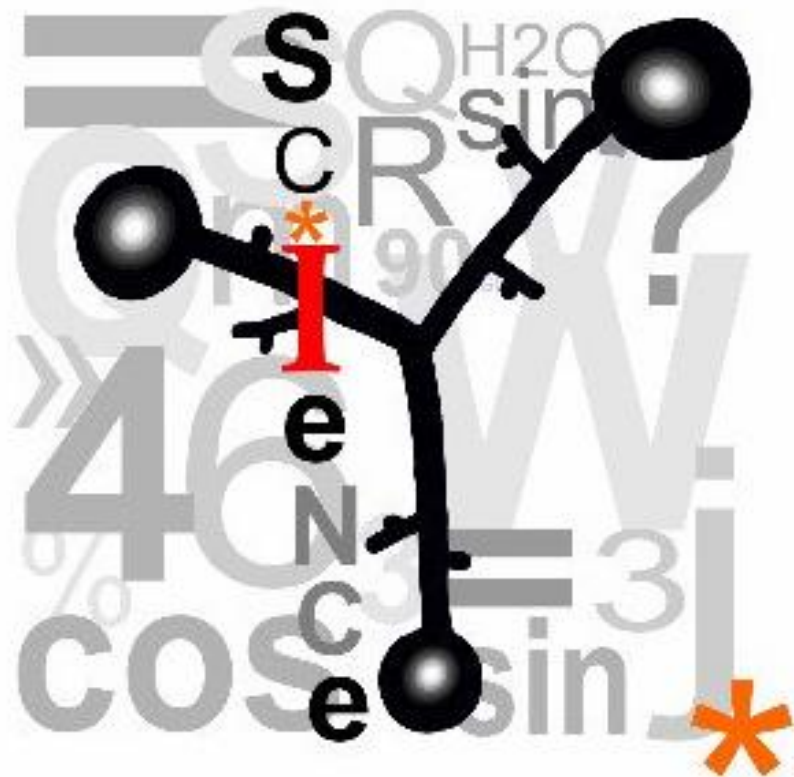
Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. **1966.** *Качественная теория динамических систем второго порядка.* М.: Наука, 568 с.

Фроммер М. **1941.** Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. *Успехи математических наук*, 9: 212–253.

Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. **1976.** *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* М.: Наука, 496 с.

Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. **1982.** *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Минск: Изд – во БГУ, 208 с.

Адыгейский
государственный
университет



**БЛАГОДАРЮ
ЗА ВНИМАНИЕ!**