

Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений

Магомет Мишаустович Шумафов

Вячеслав Бесланович Тлячев

Адыгейский государственный университет

Осенние математические чтения в Адыгее

Посвящается памяти

профессора **Казбека Сагидовича Мамия**

Майкоп

2025

$$1) \exists \alpha(y), \beta(y) \text{ such that } \Rightarrow$$

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y)$$

$$x J_0''(x) + J_0'(x) + x J_0(x) = 0.$$

$$d\varphi = \int_0^\pi \sin(x \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi =$$

$$\int_0^\pi \sin(x \cos \varphi) \cdot \cos \varphi d\varphi =$$

$$\cos(x) - \int_0^\pi \sin(x \cos \varphi) \cdot \cos \varphi d\varphi =$$

$$\sin(x \cos \varphi)$$

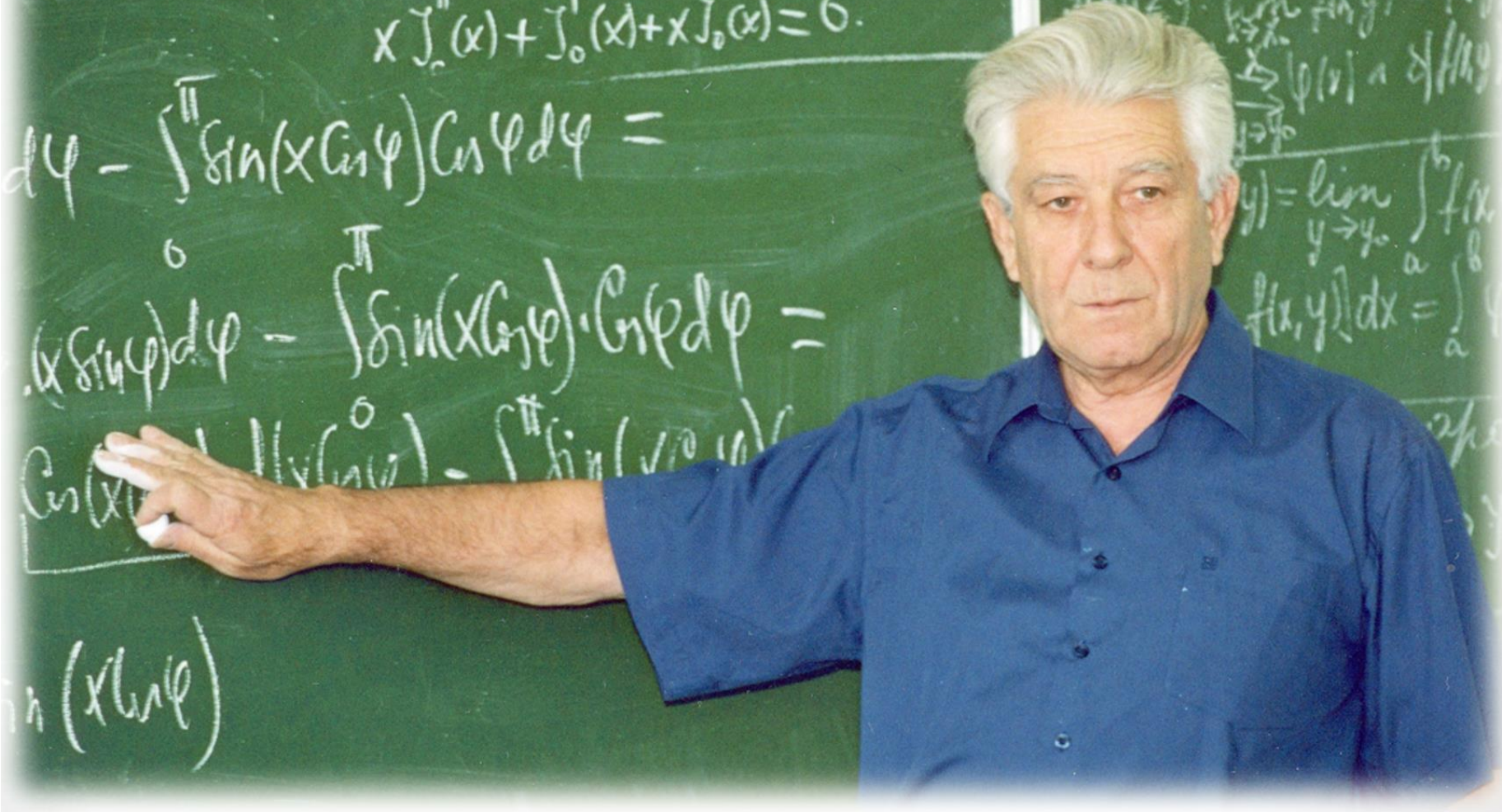
1. $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}, x, y$

2. $\forall x \in X \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$

3. $\forall y \in Y: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y)$

$\sum \varphi(y) = \sum \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$

$\varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$



Содержание

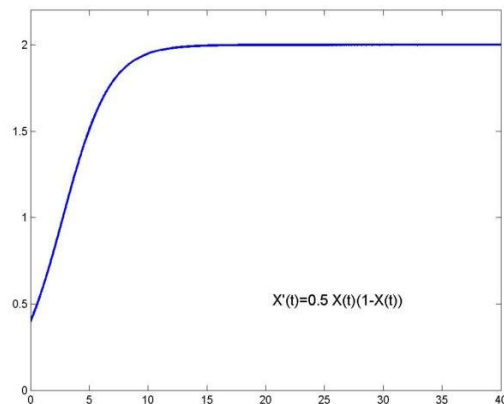
- ◆ Мотивация
- ◆ Винеровские процессы
- ◆ Белый шум
- ◆ Стохастический интеграл
- ◆ Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)
- ◆ Устойчивость СДУ

Мотивация

Задача 1 (Экология). Модель Ферхюльста: логистический рост отдельных видов популяций

$$\dot{x} = rx(K - x), \quad x(0) = x_0 \quad (\dot{x} \equiv dx/dt), \quad (1)$$

где $x = x(t)$, r - параметр роста, K - ёмкость среды, $r(K - x)$ - коэффициент прироста (на одну особь).

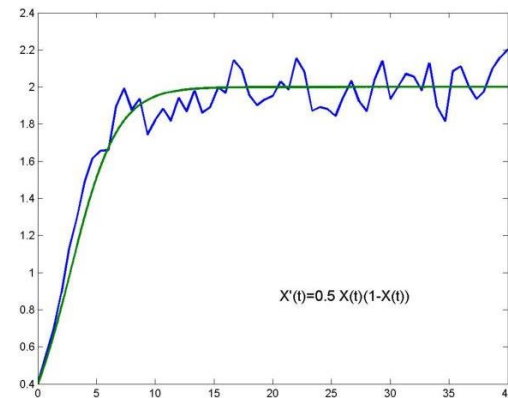


$$\tilde{K} = K + \text{"шум"} \quad (1')$$

K - среднее

(Рисунки взяты из книги
Stochastic Differential Equations,
Part I (Evelyn Buckwar))

$$\dot{x} = rx(K - x)$$



$$\dot{x} = rx(\tilde{K} - x),$$

$$\tilde{K} = K + \text{"шум"}$$

Как решать (1), (1') ?

Мотивация

Задача 2 (Электрические цепи). Заряд $Q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

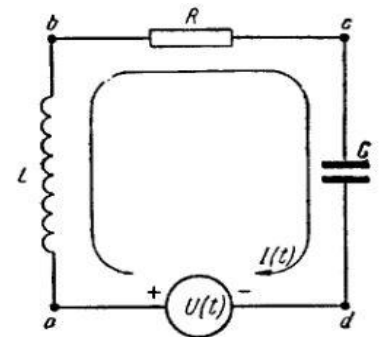
$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U(t), \quad (2)$$

где L - индуктивность, R - сопротивление, C - емкость, $U(t)$ - напряжение.

Ситуация, когда некоторые из коэффициентов например, $U(t)$ не детерминистические, то есть

$$\tilde{U}(t) = U(t) + \text{"шум"} \quad (2')$$

где $U(t)$ - не случайная величина.



Как решать (2), (2') ?

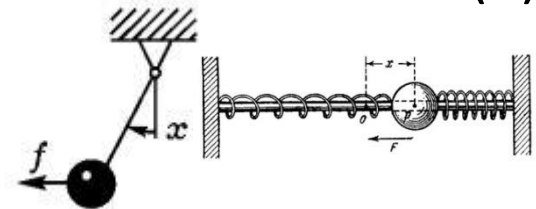
Мотивация

Задача 3 (Гармонический осциллятор). Рассмотрим линейное уравнение

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \nu^2 x = 0, \quad (3)$$

где ν - собственная частота,

k - коэффициент трения.



Считают что, k - это среднее значение коэффициента трения, в тоже время как его истинное значение - это стохастический процесс с небольшим интервалом корреляции:

$$\tilde{k} = k + \sigma \cdot \text{"шум"}, k = \text{const} \quad (3')$$

Как определить бифуркационное значение σ интенсивности шума для устойчивости (3), (3') ?

Мотивация

Другие связанные с СДУ проблемы

- ◆ Теория фильтрации
(пример, фильтр Калмана – Бьюси)
- ◆ Управление в маркетинге
(задача оптимальной остановки)
- ◆ Стохастическое управление
(задача выбора оптимального портфеля)
- ◆ Финансовая математика
- ◆ Стабилизация стохастических систем

Мотивация

В общем случае мы имеем уравнение

$$\dot{x}(t) = b(t, x(t)) + \sum_{r=1}^k \sigma_r(t, x(t)) \dot{\xi}_r(t), \quad (4)$$

где $x(t) = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$, $b(t, x)$, $\sigma_r(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{\xi}_r(t) = \eta(t, \omega)$ - скалярный "белый шум" ($r = 1, \dots, k$): $E \dot{\xi}_r(t) = 0$, $R(s, t) = \delta(t - s)$, ω - элементарное событие.

Пусть $\dot{\xi}_r(t)dt =: d\xi_r(t)$. С технической точки зрения $\xi_r(t)$ должны иметь постоянные независимые приращения со средним 0. Получается: $\xi_r(t)$ - броуновское движение.

Поэтому уравнение (4) можно переписать как стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = b(t, x(t))dt + \sum_{r=1}^k \sigma_r(t, x(t))d\xi_r(t) \quad (5)$$

где $\xi_r(t) = \xi_r(t, \omega)$ - винеровский процесс (броуновское движение).

Уравнение (5) интерпретируется как интегральное уравнение вида

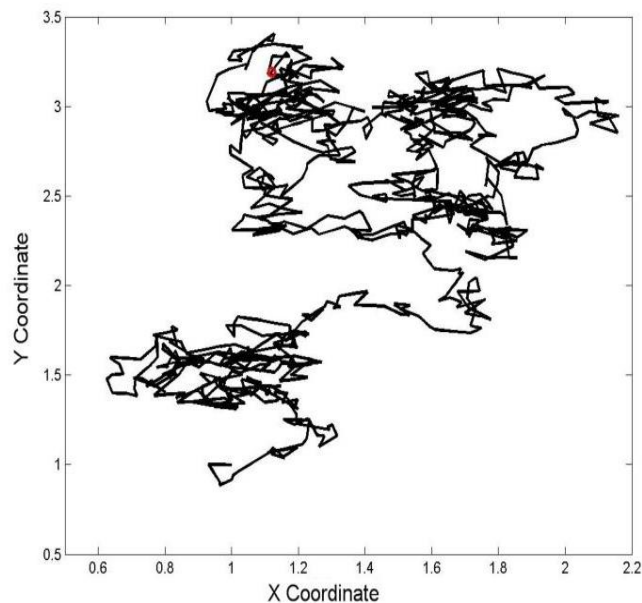
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t b(s, x(s))ds + \sum_{r=1}^k \int_{t_0}^t \sigma_r(s, x(s))d\xi_r(s) \quad (6)$$

где $\int_{t_0}^t \sigma_r(s, x(s))d\xi_r(s)$ - стохастический интеграл (Ито, Стратонович).

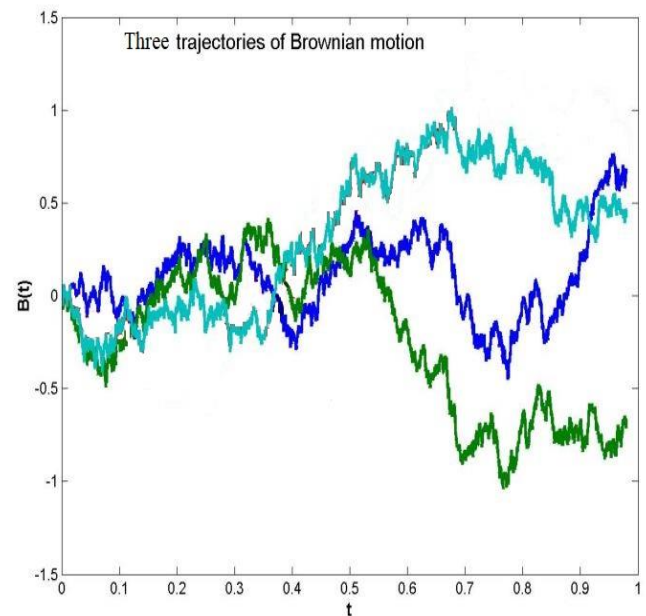
Винеровский процесс (Броуновское движение)

Броуновское движение:

Шотландский ботаник Роберт Браун (1828): движение частичек пыльцы, взвешенных в воде.



(Рисунки взяты из книги Stochastic Differential Equations, Part I (Evelyn Buckwar))



Для математического описания движения используется понятие стохастического процесса $B_t(\omega)$, интерпретируемого как положение ω частички в некоторый момент времени t .

Винеровский процесс (Броуновское движение)

Математическое определение броуновского движения.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство семейств $\{\mathcal{F}_t\} (t \geq 0)$ возрастающей последовательности сигма-алгебр $\mathcal{F}: \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} (0 \leq s < t)$; $\{\mathcal{F}_t\} (t \geq 0)$ называемых фильтрацией.

Определение (Стандартный одномерный винеровский процесс).

Действительное значение стохастического процесса $\{B_t(\omega)\} (t \geq 0)$ называется стандартным одномерным броуновским движением (или винеровским процессом) если:

- 1) $B_t(\omega)$ является $\mathcal{F}_t$ измеримым,
- 2) $B_0(\omega) = 0$ (почти наверное (п.н.)),
- 3) для всех моментов времени $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$ приращения $B_{t_1}(\omega) - B_{t_0}(\omega), \dots, B_{t_k}(\omega) - B_{t_{k-1}}(\omega)$ являются независимыми,
- 4) для $0 \leq s < t < \infty$, случайная величина $B_t(\omega) - B_s(\omega)$ нормально распределена со средним значением равным нулю, и дисперсией $t - s$, т.е. $B_t - B_s$ - гауссовская случайная величина с $N(0, t - s)$.

Мы имеем $EB_t(\omega) = 0, V(B_t(\omega)) = t$ для каждого $t \geq 0$ (по свойству 4).

Белый шум

Определение «белого шума» в широком смысле:

Действительный стохастический процесс $\dot{\xi}(t)$ ($t \geq 0$) является "белым шумом", если:

- 1) $\dot{\xi}(t)$ является гауссовским процессом,
- 2) $E\dot{\xi}(t) = 0$ для всех $t \geq 0$,
- 3) $R_{\dot{\xi}}(t, s) = E[\dot{\xi}(t) \cdot \dot{\xi}(s)] = \delta(t - s)$ для всех $t, s \geq 0$.

Стохастический интеграл (Ито, Стратоновича)

Определим стохастический интеграл $\int_a^b f(t, \omega) d\xi(t, \omega)$, где $f(t, \omega) \in L_2([a, b])$ (почти наверное), $\xi(t, \omega)$ - винеровский процесс.

Вполне естественно аппроксимировать $f(t, \omega)$ рядом $\sum_k f(t_k^*, \omega) \cdot \chi_{\Delta_k}(t)$, где $\chi_{\Delta_k}(t)$ - это индикаторная функция интервала $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$ и точки $t_k^* \in [t_k, t_{k+1})$.

Определим **стохастический интеграл** Ито случайной функции $f(t, \omega)$ как

$$\int_a^b f(t, \omega) d\xi(t, \omega) := \lim_{\max \Delta_k \rightarrow 0} \sum_k f(t_k^*, \omega) [\xi(t_{k+1}, \omega) - \xi(t_k, \omega)], \quad (7)$$

где "lim" означает предел в пространстве $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Наиболее полезными оказались следующие два варианта выбора точек t_k^* :

1) $t_k^* = t_k$ (левая конечная точка интервала $[t_k, t_{k+1})$); тогда выражение (7) приводит

к **интегралу Ито** $\int_a^b f(t, \omega) d\xi(t, \omega)$;

2) $t_k^* = (t_k + t_{k+1})/2$ (средняя точка): тогда выражение (7) приводит

к **интегралу Стратоновича** $\int_a^b f(t, \omega) \circ d\xi(t, \omega)$;

Интеграл Ито (определение)

Определение (интеграл Ито). Пусть $f(t, \omega) \in B \times \mathcal{F}_t$ - измеримая функция и $f(t, \omega) \in L_2([a, b])$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда интеграл Ито функции f от a до b определяется в виде

$$I[f](\omega) := \int_a^b f(t, \omega) d\xi(t, \omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(t, \omega) d\xi(t, \omega) \quad (\text{in } \mathcal{L}^2(\Omega))$$

где $\{\varphi_n\}$ представляет собой последовательность элементарных (ступенчатых) функций, таких, что

$$E \left[\int_a^b (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

$I[f](\omega)$ - случайная величина: $I[f] \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Если $f(t, \omega) \equiv f(t)$, то $\int_a^b f(t) d\xi$ - интеграл Пейли-Винера (1934).

Стохастические интегралы со значениями в $\mathbb{R}^n$ определяются по координатам.

Оригинальные статьи:

- ◆ Ito K. (1942) J. Pan-Japan Math. Coll. (1077): 1352–1400.
- ◆ Ito K. (1944) Stochastic integral (Proc. Imp. Acad. Tokyo, V. 20, 519 – 524)
- ◆ Ito K. (1951) On stochastic differential equations (Memoirs Amer. Soc., №4, 1 – 51)

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)

Рассмотрим СДУ

$$dx(t) = b(t, x)dt + \sum_{r=1}^k \sigma_r(t, x)d\xi_r(t), \quad (8)$$

где $x(t) = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^n, \sigma_r(t, x) \in \mathbb{R}^n, \xi_1(t), \dots, \xi_k(t)$ - взаимно-независимы, $\mathcal{F}_t$ - измеримо.

Винеровские процессы таковы, что случайные переменные $\xi_i(t+h) - \xi_i(t)$ являются независимыми от каждого события из $\mathcal{F}_t$ для $h > 0$; $dx(t)$ и $d\xi_r(t)$ являются стохастическими дифференциалами процесса $x(t, \omega)$ и винеровского процесса $\xi_r(t)$ ($r = 1, \dots, k$).

Уравнение (8) интерпретируется как уравнение, связывающее стохастические дифференциалы процесса $x(t, \omega)$ в $\mathbb{R}^n$ и винеровский процесс $\xi_r(t)$, то есть в интегральном смысле выражение

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t b(s, x(s))ds + \sum_{r=1}^k \int_{t_0}^t \sigma_r(s, x(s))d\xi_r(s) \quad (9)$$

Определение (решения для СДУ). Стохастический процесс $x(t) = x(t, \omega)$ называется решением СДУ (8) на интервале $[t_0, T]$, если $x(t)$ является $\mathcal{F}_t$ измеримым для каждого t , интегралы

$\int_{t_0}^t b ds, \int_{t_0}^t \sigma_r d\xi_r$ в (9) существуют и интегральное равенство (9) выполняется почти наверное для каждого $t \in [t_0, T]$.

Для СДУ (8) теорема существования и единственности имеет место при а) условии Липшица и б) условии линейного роста.

Предыстория

Луи Башелье (1900) – первый исследователь, который смоделировал стохастический процесс - броуновское движение, в рамках своей докторской диссертации «**Теория спекуляций**» (**Theorie de la speculation**) [защищена в 1900 году, руководитель **Анри Пуанкаре**]. В своей диссертации Башелье представил впервые математическую модель броуновского движения. Это была первая работа, в которой использовалась продвинутая математика при изучении финансов. Его модель оказала влияние на разработку других широко используемых моделей, включая модель Блэка-Шоулза.

Поль Ланжевен (1908) ввел стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее, как развивается система, когда она подвергается воздействию комбинации детерминированных и флуктуирующих ("случайных") сил [статья «О теории броуновского движения» [‘Sur la theorie du Movement brownian’, C. R. Acad. Sci. (Paris) 146, 530-533 (1908)].

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a \frac{dx}{dt} + X, \quad (L)$$

где m - масса, μ - вязкость, a - радиус частицы, X – случайная сила.

В терминах скорости уравнение (L) можно переписать следующим образом:

$$m\dot{v} = -\beta v + \dot{w}, \quad \beta = 6\pi\mu a > 0, \quad t \geq 0.$$

Основа: Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)

Первые: **Bachelier L.** (1900) докторская диссертация
Langevin P. (1908) Acad. Sci. Paris, 146,530--533.

Математические статьи по СДУ начали появляться только в 30-х годах прошлого века.

Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А. (1933) ЖЭТФ, 1933. Т. 3, 165-180.

Бернштейн С.Н. (1934) (Тр. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, No 5, 95-124)

Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. (1939) (Зап. каф. мат. физ. АН СССР, No 4, 5-158)

Ito K. (1942)(J. Pan-Japan Math. Coll. (1077): 1352–1400)

Гихман И.И. (1947)(ДАН СССР, No 58, 961-964)

Гихман И.И. (1950) Теория диф. ур. к стох. проц. (Укр. мат. жур., 2(3), 45-69)

Гихман И.И. (1950) Теория диф. ур. к стох. проц. (Укр. мат. жур., 2(4), 37-63)

Гихман И.И. (1951)(Укр. мат. жур. 3, 317-339)

Предыстория



Wolfgang Döblin (Vincent Doblin) (1940) (Sur L'équation de Kolmogoroff)

Гихман И.И. (1941)(Науч. зап. Киевского ун-та, No 5.)



Ito K. (1942) (J. Pan-Jap. Math. Coll. (1077))

Ito K. (1944) (Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20)

Ito K. (1946) (Proc. Jap. Acad., 22:2, 32-35)

Ito K. (1950) (Nagoya Math. J., 1, 35-47)

Ito K. (1951) (Mem.AMS)



В 1964 году Стратонович Р.Л. определил стохастический интеграл по-другому:

Стратонович Р.Л. Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. 1964. Т. 1. С. 3–12.

Вклад в теорию СДУ: Smoluchowski M., Einstein A., Ornstein L.S.,

Uhlenbeck G.E., Колмогоров А.Н., Chapman S., Wiener N., Chandrasekhar S., Doob J.L., Стратонович Р.Л., Ширяев А.Н. , Wong E., Zakai M.

Устойчивость: Основные статьи

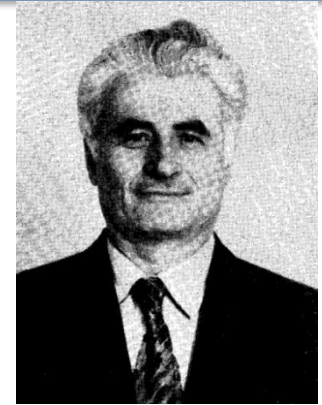
- * **Кац И.Я., Красовский Н.Н.** (1960) (Прикл. мат. мех. Т. 24(5), 809-823)
- * **Kushner H.** (1964) (Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 53(1), 8-12)
- * **Гихман И.М., Дороговцев А.Я.** (1965) (Укр. мат. жур., 17(6), 3-21)
- * **Khasminskii R.Z.** (1966) (Прикл. мат. мех. 30(5), 915–921)
- * **Хасьминский Р.З.** (1967) (Теор. вероятн. и применен., 12(1), 167–172)
- * **Левит М.В.** (1972) (Успехи мат. наук, 27(4), 215-216)
- * **Pakshin P.V.** (1977) (Automation and Remote Control, 38(4), 474–481)
- * **Shumafov M.M.** (1981) (Дифференциальные уравнения. Т. 17(6), 1143–1145)
- * **Мао Х.** (2001) (J. of Math. Analysis and Applications 260, 325–340)
- * **Шумафов М.М.** (2010) (Дифференциальные уравнения. Т. 46(6), 901–905)
- * **Султанов О.** (2017) (Математические заметки. Т. 101(1–2), 149–156)
- * **Шумафов М.М., Тлячев В.Б.** (2018) (Итоги науки и техники, 149, 118–128)
- * **Кореневский Д.Г.** (1986). ДАН СССР, Т. 290, №5, 1041 – 1044; №6, 1294 – 1298.
- * **Кореневский Д.Г.** (2001). Математические заметки. Т. 70, №2, 213 – 229.
- * **Кадиев Р.И., Поносов А.В.** (2017). Прикл. мат. и проблемы управл., №2, 32 – 47.
- * **Sandrić N.** (2018). Journ. of Mathem. Analysis and Appl., № 467, 734–750.
- * **Shumafov M.M., Tlyachev V.B.** (2021). arxiv.org arXiv:2104.01637.

Устойчивость: Книги и монографии



* **Kushner H.** (1967)
Stochastic Stability and
Control, Academic Press,
N.Y.-London.

• **Хасминский Р.З.** (1969)
Стохастическая устойчивость
диф. уравнений.



Основные книги по стохастическим дифференциальным уравнениям

- * **Гихман И.И., Скороход А.В.** (1968) Стохастические дифференциальные уравнения.
- * **Arnold L.** (1974) Stochastic Differential Equations, Theory and Applications.
- * **Friedman A.** (1975) Stochastic Differential Equations and Applications.
- * **Булinsky А.В., Ширяев А.Н.** (2005) (Теория случ. процессов, глава VIII)
- * **Mao X.** (2007) Stochastic Differential Equations and Applications.
- * **Леваков А.А.** (2009) Стохастические дифференциальные уравнения, Минск.

Обзоры:

- * **Thygesen U.H.** (1997) A Survey of Lyapunov techniques for SDE. IMM Tech. Report.
- * **Пакшин П.В., Угриновский В.А.** (2006) (Автомат. и телемех. 67 (11), 1811–1846).
- * **Visentin F.** (2013) (Scientiae Mathematicae Japonicae, 76(1), 147–152).

Стохастическая устойчивость: Определения

Рассмотрим стохастическую систему

$$dx(t) = f(x)dt + \sigma(x)d\xi(t), \quad (S)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ – вектор-функция, $\sigma(x)$ – $(n \times m)$ матричная функция, $\xi(t)$ – m -мерный винеровский процесс.

Определение 1. Тривиальное решение системы (S) называется устойчивым по вероятности для $t > 0$, если $\forall t_0 \geq 0, r > 0, \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(r, \varepsilon) > 0$: если $\|x_0\| < \delta \Rightarrow P\{\sup_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, x_0)\| < r\} \geq 1 - \varepsilon$.

Определение 2. Тривиальное решение системы (S) называется асимптотически устойчивым по вероятности, если (a) оно устойчиво по вероятности,

$$(b) \forall t_0 \geq 0, \mu > 0, \exists \delta = \delta(\mu) > 0: \text{если } \|x_0\| < \delta \Rightarrow P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0\} \geq 1 - \mu.$$

Определение 3. Тривиальное решение системы (S) называется глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если: (a) оно устойчиво по вероятности; (b) $\forall K > 0$ и любого решения $x(t; t_0, x_0)$ с $\|x_0\| < K$ полностью выполнены соотношения: $\forall r > 0 \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\|x(t, \omega)\| > r\} = 0$.

Определение 4. Тривиальное решение системы (S) называется асимптотически устойчивым по вероятности в целом, если оно устойчиво по вероятности и $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0\} = 1 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Иллюстрации стохастической устойчивости

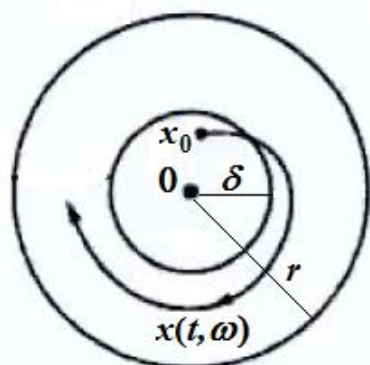


Рис. 1. Устойчивость по вероятности
 $x(t) \equiv 0$: $P\{\sup_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, x_0)\| < r\} \rightarrow 1$ as $\|x_0\| \rightarrow 0$.

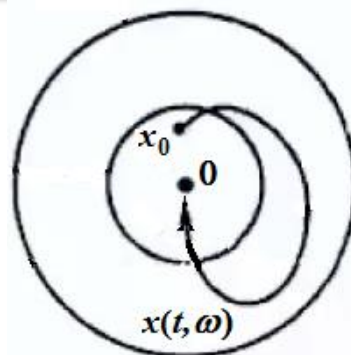


Рис. 2. Асимптотическая устойчивость:
 а) $x(t) \equiv 0$ устойчиво по вероятности (Рис. 1),
 б) $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0\} \rightarrow 1$
 при $\|x_0\| \rightarrow 0$.

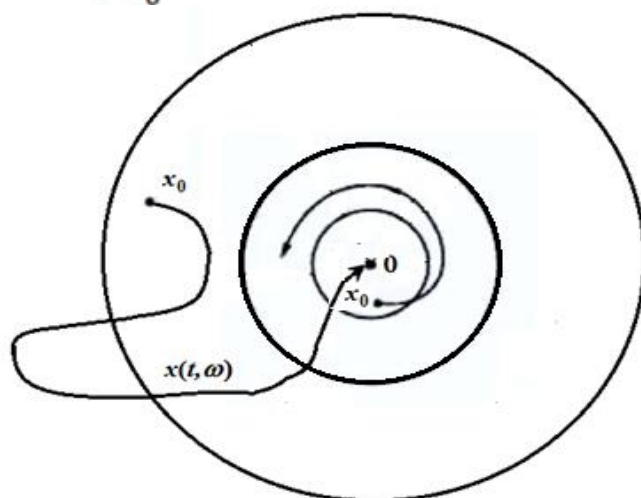


Рис. 3. Асимптотическая устойчивость по вероятности в целом

- а) $x(t) \equiv 0$ устойчиво по вероятности (Рис. 1),
 б) $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0\} = 1 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

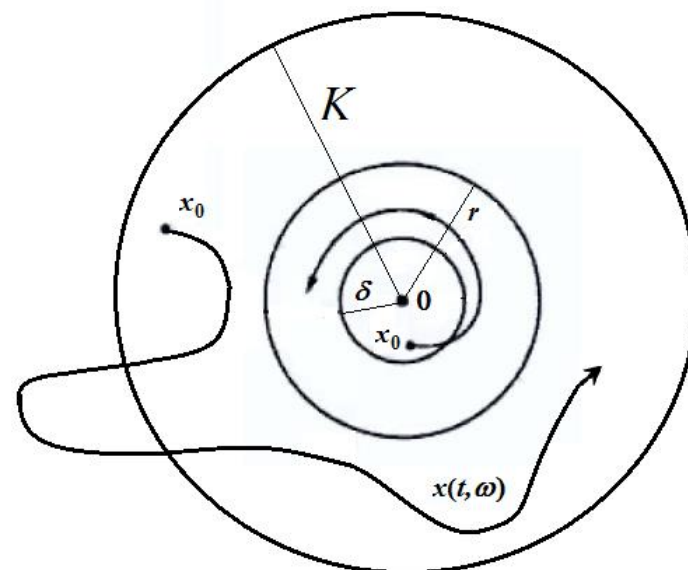


Рис. 4. Глобальная асимптотическая устойчивость по вероятности:
 а) $x(t) \equiv 0$ устойчиво по вероятности (Рис. 1),
 б) для любого $K > 0$ и любого $r > 0$ $P\{\|x(t; t_0, x_0)\| > r\} \rightarrow 0$
 при $t \rightarrow \infty$, где $\|x_0\| < K$.

Стохастическое уравнение Льенара

Рассмотрим стохастическое уравнение Льенара

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x)\dot{w}(t), \quad (10)$$

где функции $f(x)$, $g(x)$, $\sigma(x) \in Lip$, $\dot{w}(t)$ - белый шум.

Перепишем (10) как систему уравнений Ито:

$$dx(t) = [y(t) - F(x(t))]dt, \quad dy(t) = -g(x(t))dt + \sigma(x(t))dw(t), \quad (11)$$

$F(x) = \int_0^x f(s)ds$, $w(t)$ - скалярный винеровский процесс; $f(0) = g(0) = \sigma(0) = 0$.

Теорема 1. Пусть для системы (11) выполняются следующие условия:

существуют числа c_1 , c_2 и c такие, что

$$a) g(x)/x > c_1 > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$b) F(x)/x > c_2 > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$c) 0 < \sigma(x)/x < c \quad \forall x \neq 0, \text{ and } c^2 < 2c_1c_2.$$

Тогда нулевое решение $(x(t, \omega) \equiv 0, y(t, \omega) \equiv 0)$ системы (11) является глобально асимптотически устойчивым по вероятности.

Стохастическое уравнение Ван-дер-Поля

Рассмотрим стохастическое уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = \sigma(x)\dot{\xi}(t) \quad (\mu > 0), \quad (12)$$

где $\sigma(x)$ - некоторая функция, $\dot{\xi}(t)$ - белый шум. Перепишем (12) в виде системы уравнений Ито :

$$\begin{cases} dx = \left[y - \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] dt, \\ dy = -\omega^2 x dt + \sigma(x) d\xi(t). \end{cases} \quad (13)$$

Теорема 2. Положим $\mu < 0$ и существует число $c > 0$ такое, что $0 < \sigma(x)/x < c$. Тогда для некоторого решения $(x(t, \omega), y(t, \omega))$

$$P\{\sup_{0 \leq t < \infty} V(x(t), y(t)) \geq m\} \leq V(x_0, y_0)/m$$

и $x(t) \rightarrow 0$ с вероятностью по крайней мере $1 - (V(x_0, y_0)/m)$, где

$$V(x, y) = y^2/2 + \omega^2 x^2/2, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Стохастическое уравнение Левинсона-Смита

Рассмотрим стохастическое уравнение Левинсона-Смита:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = \sigma(\dot{x})\dot{\xi}(t), \quad (14)$$

$$dx = ydt, \quad dy = [-yf(x, y) - g(x)]dt + \sigma(y)d\xi, \quad (15)$$

где $f, g, \sigma \in Lip$. Предположим, что $g(0) = \sigma(0) = 0$.

Теорема 3. Пусть существуют числа b и σ_0 такие, что :

- 1) $f(x, y) > b > 0$ for all x, y ,
- 2) $xg(x) > 0$ for all $x \neq 0$ and $\int_0^x g(s)ds \rightarrow +\infty$ as $|x| \rightarrow \infty$,
- 3) $0 < \frac{\sigma(y)}{y} < \sigma_0^2$ and $\sigma_0^2 < 2b$.

Тогда тривиальное решение $(x(t, \omega) \equiv 0, y(t, \omega) \equiv 0)$ системы (15) является глобально асимптотически устойчивым по вероятности. Более того, для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (15)

$$P\{\sup_{0 \leq t < \infty} V(x(t), y(t)) \geq m\} \leq V(x_0, y_0)/m, \quad m > 0,$$

где $V(x, y) = y^2/2 + \int_0^x g(s)ds$, начальные значения $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ такие, что $(x_0, y_0) \in \{(x, y): V(x, y) < m\}$.

Кроме того, $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ с вероятностью, по крайней мере $1 - V(x_0, y_0)/m$.

Стохастическое уравнение Рэля

Рассмотрим стохастическое уравнение Рэля:

$$\ddot{x} + f(x)\varphi(\dot{x}) + g(x) = \sigma(\dot{x})\dot{\xi}(t), \quad (16)$$

где f, φ, g, σ - заданные функции, $\dot{\xi}(t)$ - белый шум. Перепишем (16) как систему Ито:

$$dx = ydt, \quad dy = [-f(x)\varphi(y) - g(x)]dt + \sigma(y)d\xi(t), \quad (17)$$

где $f, \varphi, g \in Lip$. Положим, что $\varphi(0) = g(0) = \sigma(0) = 0$.

Теорема 4. Предположим, что существуют числа b_1, b_2, σ_0 такие, что выполняются следующие условия:

- 1) $f(x) \geq b_1 > 0 \quad \forall x$,
- 2) $\varphi(y)/y \geq b_2 > 0 \quad \forall y \neq 0$,
- 3) $xg(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ и $\int_0^x g(s)ds \rightarrow +\infty$ as $|x| \rightarrow \infty$,
- 4) $0 < \sigma(y)/y < \sigma_0^2$ и $\sigma_0^2 < 2b_1b_2$.

Тогда нулевое решение $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (17) является глобально асимптотически устойчивым по вероятности.

В дополнение, $P\{\sup_{0 \leq t < \infty} V(x(t), y(t)) \geq m\} \leq V(x_0, y_0)/m$,

где $V(x, y) = y^2/2 + \int_0^x g(s)ds$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Уравнение Дуффинга

Рассмотрим стохастическое уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \sigma(x, \dot{x}) \dot{w}(t), \quad \dot{w}(t) - \text{белый шум.} \quad (18)$$

Уравнение (18) может быть записано как система уравнений Ито

$$dx(t) = y(t)dt, \quad dy(t) = (-\beta x - \alpha x^3 - \delta y)dt + y\sigma(x, y)dw(t) \quad (19)$$

где $\sigma(x, y) \in Lip$, $\sigma(0, 0) = 0$, $w(t)$ - одномерный винеровский процесс.

Theorem 5. Положим $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и функция $\sigma(x, y)$ удовлетворяет условию $\sigma(x, y)^2 < 2\delta$. Тогда нулевое решение $(x(t, \omega) \equiv 0, y(t, \omega) \equiv 0)$ системы (19) является глобально асимптотически устойчивым по вероятности. Более того, для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (19) справедлива оценка

$P\{\sup_{0 \leq t < \infty} V(x(t), y(t)) \geq m\} \leq V(x_0, y_0)/m$ для любого $m > 0$,
где $V(x, y) = 2y^2 + 2\beta x^2 + \alpha x^4$, начальные данные $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ таковы, что $(x_0, y_0) \in \{(x, y): V(x, y) < m\}$.

В дополнение, $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ с вероятностью не меньше, чем

$$1 - V(x_0, y_0)/m.$$

Уравнение Дуффинга

Случай $\alpha > 0, \beta < 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Положим $\alpha > 0, \beta < 0$ и $\sigma(x, y)^2 < 2\delta$. Тогда для любого решения $(x(t, \omega), y(t, \omega))$ системы (19) имеем

$$P\{(x(t, \omega), y(t, \omega)) \rightarrow S\} = 1,$$

где $S = \{(x, y): y = 0\}$.

Замечание. Действительно, можно доказать, что для любого решения $(x(t, \omega), y(t, \omega))$ соотношения сохраняются

$$P\{(x(t, \omega), y(t, \omega)) \rightarrow (\sqrt{-\beta/\alpha}, 0)\}$$

или

$$P\{(x(t, \omega), y(t, \omega)) \rightarrow (-\sqrt{-\beta/\alpha}, 0)\} = 1.$$

Стохастическое уравнение Льенара, возмущенное двумя белыми шумами

Рассмотрим уравнение Льенара, возмущенное двумя белыми шумами с интенсивностями, зависящими от x и y соответственно

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = \sigma_2(x)\dot{\xi}_2(t) + \sigma_1(x)\dot{\xi}_1(t) \quad (20)$$

или в форме Ито

$$dx = ydt, \quad dy = [-yf(x) - g(x)]dt + \sigma_2(x)d\xi_2 + \sigma_1(y)\xi_1, \quad (21)$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – независимые винеровские процессы, а $f, g, \sigma_1, \sigma_2 \in Lip$.

Теорема 7. (об асимптотической устойчивости по вероятности в целом).

Предположим, что существуют положительные константы b_1, b_2, c_1, c_2 такие, что:

a) $f(x) \geq b_1$ для всех $x \in \mathbb{R}$,

b) $\frac{g(x)}{x} \geq b_2$ для всех $x \neq 0, g(0) = 0$,

c) $0 < \frac{\sigma_1(y)}{y} \leq c_1$ для всех $y \neq 0, \sigma_1(0) = 0$,

d) $0 < \frac{\sigma_2(x)}{x} \leq c_2$ для всех $y \neq 0, \sigma_2(0) = 0$,

e) $2b_1b_2 > b_2c_1^2 + c_2^2$.

Тогда нулевое решение ($x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$) системы (21) асимптотически устойчиво по вероятности в целом.

Стохастическое уравнение Льенара

Замечание 1. Условия $a)$ - $e)$ теоремы 7 являются также достаточными для глобальной асимптотической устойчивости по вероятности.

Замечание 2. В линейном случае $f(x) = b_1$, $g(x) = b_2x$, $\sigma_1(y) = c_1y$, $\sigma_2(x) = c_2x$ достаточные условия $a)$ - $e)$ теоремы 7 сводятся к условию $e)$.

Замечание 3. В линейном случае $f(x) = b_1$, $g(x) = b_2x$, $\sigma_1(y) = c_1y$, $\sigma_2(x) = c_2x$ условие $e)$ является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом нулевого решения системы (21) [Хасьминский].

Замечание 4. Если к условиям $a)$ - $e)$ теоремы 7 добавить условия $f(x) \leq b_3$, $g(x)/x \leq b_4$, то $(x = 0, y = 0)$ экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.

Стохастическая устойчивость двумерных систем

Рассмотрим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений, возмущенных белым шумом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2) + \sigma(x_1)\dot{\xi}(t), \\ \dot{x}_2 = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2), \end{cases} \quad (S)$$

где две из функций $h_{ij} = f_{ij}(x_j)/x_j$, $(x_j \neq 0)$, $i, j = 1, 2$ являются постоянными, $\dot{\xi}(t)$ – белый шум.

Предполагается, что $f_{ij}, \sigma \in Lip$ и $f_{ij}(0) = \sigma(0) = 0$.

Система (S) интерпретируется как система стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито.

Изучим вопрос о стохастической устойчивости решений для систем вида (S). Без ограничения общности будем рассматривать стохастическую устойчивость нулевого решения $(x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0)$.

Статьи: детерминированный случай

Детерминированный случай, когда в (S) $\sigma(x_1) \equiv 0$
был рассмотрен в работах:

- Н.П. Еругин (с единственной нелинейностью)
 1. Прикладная математика и механика, том 14 (5), 1950.
 2. Прикладная математика и механика, том 14(6), 1950.
 3. Прикладная математика и механика, том 16(5), 1952.
- И.Г. Малкин (с единственной нелинейностью)

Прикладная математика и механика, том 16 (3), 1952.
- В.А. Плисс (с единственной нелинейностью)

Прикладная математика и механика, том 17(5), 1953.
- М.А. Айзерман (с двумя нелинейностями)

Автоматика и телемеханика, том 7(2), 1946.
- Н.Н. Красовский (с двумя нелинейностями)
 1. Прикладная математика и механика, том 16 (5), 1952.
 2. Прикладная математика и механика, том 17(6), 1953.

Стохастическая устойчивость двумерной системы

Рассмотрим систему, возмущенную белым шумом

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + ay + \sigma(x)\dot{\xi}(t), \\ \dot{y}(t) = bx + g(y), \end{cases} \quad (22)$$

где $f, g, \sigma \in Lip$, $f \in C^1$, $\dot{\xi}(t)$ - белый шум, $f(0) = g(0) = \sigma(0) = 0$, a и b - постоянные.

Система (22) интерпретируется как система стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито.

Теорема 1. Предположим, что существуют числа $\delta_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и $m > 0$ такие, что удовлетворяются следующие условия:

- 1) $c_1 f(x)/x - ab \geq \delta_1$ для всех $x \neq 0$, 5) $c_1 f'(x) - ab \leq m$ для всех x ,
- 2) $f(x)/x + c_1 \leq -\delta_2$ для всех $x \neq 0$, 6) $0 < \sigma(x)/x \leq \delta_4$ для всех $x \neq 0$, $\sigma^2(x) = O(1)$ $|x| \rightarrow \infty$,
- 3) $c_2 g(y)/y - ab \geq \delta_3$ для всех $y \neq 0$, 7) $\delta_4^2 \leq 2\delta_1\delta_2/(c_1^2 + m)$,
- 4) $g(y)/y + c_2 < 0$ для всех $y \neq 0$,

где c_1 и c_2 - постоянные, такие что $c_1 c_2 = ab$, $ab \neq 0$.

Тогда нулевое решение $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ системы (22) является глобально асимптотически стохастически устойчивым.

Замечание 1. В детерминированном ($\sigma(x) \equiv 0$) и линейном случае условия 1) – 5) обобщают условия Рауса-Гурвица для асимптотической устойчивости линейных двумерных систем.

Замечание 2. В случае $\sigma(x) \equiv 0$ система (22) была рассмотрена М.А. Айзерманом. [Автоматика и телемеханика (1946, т. 7. Вып. 2-3)].

Гармонический осциллятор, возмущенный “белым шумом”

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = \sigma(x)\dot{w}(t), \quad \dot{w}(t) - \text{белый шум}, \quad (*)$$

где $k > 0$, $\sigma(x)^2$ - протяженность шума $\dot{w}(t)$, $\sigma(0) = 0$.

Применим Теорему 1. Мы имеем

Утверждение 1. Тривиальное решение $(x(t)=0, y(t)=0)$ эквивалентного (*) системы Ито

$$dx = (y - kx)dt, \quad dy = -\omega^2 dx + \sigma(x)dw(t)$$

является глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если

$$0 < \sigma(x)/x < c \quad \text{and} \quad c^2 < 2k\omega^2.$$

Замечание. В случае $\sigma(x) = cx$ условие $c^2 < 2k\omega^2$ является необходимым и достаточным условием для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом, т.е.

$$E\|(x(t, \omega), y(t, \omega))\|^2 \leq A\|(x_0, y_0)\|^2 \exp(-\alpha t)$$

для некоторых $A > 0$ и $\alpha > 0$.

Обобщенное уравнение Ланжевена

Пример 2. Рассмотрим **обобщенное уравнение Ланжевена**

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + g(x) = \sigma(x) \dot{w}(t), \quad (GL)$$

где $\alpha > 0$ некоторая постоянная, функции $g(x)$ и $\sigma(x)$ удовлетворяют условию Липшица, и $\dot{w}(t)$ - это гауссовский белый шум.

Положим $g(0) = \sigma(0) = 0$. Заметим, что если $g(x) = 0$ и $\sigma(x) \equiv \sigma (= const)$, тогда уравнение (GL) превращается в классическое уравнение Ланжевена.

Уравнение (GL) можно рассматривать как уравнение, описывающее движение броуновской частицы вдоль оси x под влиянием внешней силы с потенциалом

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds$$

и коэффициентом диффузии $\sigma(x)$, который зависит от положения частицы.

Обобщенное уравнение Ланжевена

Мы интерпретируем уравнение (GL) как систему двух стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито

$$dx(t) = ydt, \quad dy(t) = -(\alpha y + g(x))dt + \sigma(x)dw(t), \quad (SL)$$

где $w(t)$ - скалярный винеровский процесс.

Уравнение (SL) является частным случаем стохастического уравнения Льебмана.

Применяя теорему 1 (см. слайд выше), мы имеем

Утверждение 2. *Тривиальное решение $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ уравнения (SL) является глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если существуют числа β и σ_0 , такие что*

a) $g(x)/x > \beta > 0$ для всех $x \neq 0$,

b) $0 < \sigma(x)/x < \sigma_0$ для всех $x \neq 0$,

c) $\sigma_0^2 < 2\alpha\beta$.

Замечание. Также могут быть получены достаточные условия для стохастической устойчивости в том случае, когда коэффициент диффузии σ зависит от скорости броуновской частицы: $\sigma = \sigma(\dot{x})$.

Другой класс случайных процессов

Рассмотрим дифференциальное уравнение со случайным процессом в правой части

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\xi(t, \omega), \quad (23)$$

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\xi(t, \omega), \quad (24)$$

$$\ddot{x} + \varphi(x, \dot{x}) + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\xi(t, \omega), \quad (25)$$

где $f, F, \varphi, \sigma \in Lip (x \in R, t \geq 0)$, $\xi(t, \omega)$ - измеримый стохастический процесс со значениями в $\mathbb{R}$ и $\xi(t, \omega) \in L$ (почти наверное).

Положим $F(0) = \varphi(0,0) = g(0) = \sigma(0,0) = 0$.

В случае $\sigma(x, y) \equiv 0$ (детерминированный случай) уравнения (23)-(25) были изучены в работах [Книги: **Lefschetz S.** (Diff.Eqs); **Cesari L.** (Asymp. Behav. and stability problems in ordin. diff.eq.s.); **Reissig R.** et al. (Qualit. theory nichtlin. Differentialgleichungen)]

Мы получили достаточные условия для асимптотической по вероятности в целом тривиального решения уравнений (23)-(25).

Сформулируем один результат об устойчивости для уравнения (23).

Теорема о (слабой) устойчивости

Введем вспомогательную функцию типа Ляпунова

$$V(x, y) = (W(x, y))^\alpha, \quad W(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s)ds + \gamma xy + \beta \frac{x^2}{2},$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 0$, γ - достаточно мало.

Введем $B = \sup_{(x_i, y_i) \in R^2} \frac{|V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1)|}{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Предположим, что существуют числа $c_i > 0$ ($i = \overline{1, 6}$) такие, что

1) $0 < c_1 < g(x)/x < c_2$ для всех $x \neq 0$,

2) $0 < c_3 < f(x) < c_4$ для всех $x \in R$,

3) $|\sigma(x, y)| \leq c_5 \sqrt{\lambda_0} (x^2 + y^2)^{1/2}$ для всех $(x, y) \in R^2$,

где λ_0 является наименьшим положительным корнем уравнения

$$4\lambda^2 - 2(c_1 + \beta + 1)\lambda + c_1 + \beta - \gamma^2 = 0.$$

4) $\gamma^2 < \beta < 4c_1c_3/c_4^2$,

5) стохастический процесс $\xi(t, \omega)$ удовлетворяет закону больших чисел: для любого $\varepsilon > 0, \delta > 0, \exists T > 0$:

$$P \left\{ \left| \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} \xi(s, \omega) ds - \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} E \xi(s, \omega) ds \right| > \delta \right\} < \varepsilon \quad \text{для всех } t > T \text{ и } \sup_{t > 0} E |\xi(t, \omega)| < c_6 / (Bc_5).$$

Теорема о (слабой) устойчивости

Тогда тривиальное решение (23) является асимптотически устойчивым (слабо) по вероятности в целом.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = \sigma(x, \dot{x})\xi(t, \omega), \quad (**)$$

где $k > 0$, $\xi(t, \omega)$ - стохастический процесс, и $\sigma(0,0) = 0$.

Применяя Теорему 7 к уравнению (**) мы имеем

Утверждение 3. *Предположим, что выполнены условия 3)-5) Теоремы 7. Тогда тривиальное решение уравнения (**) асимптотически устойчиво (слабо) по вероятности в целом.*

Активная область исследований

Проблемы стохастической устойчивости и связанные с ними вопросы являются активной областью исследований. Поток публикаций по этой тематике не уменьшается.

Спасибо за внимание!