

Характеризация конечных игр: метод потенциальных функций

ОСЕННИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ 2025

Я. В. Жуков, 2025

Рассмотрим игру в нормальной форме $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} \rangle$, где N конечное множество игроков; S_i это множество чистых стратегий i -го игрока; $u_i : \prod_{i \in N} S_i \rightarrow \mathbb{R}$ это функция выигрыша i -го игрока. Обозначим $S = \prod_{i \in N} S_i$.

Пусть в игре найдется функция $P : S \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $\forall i \in N$ (один из четырех случаев)

$$\mathbf{1} \quad u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) > 0 \Rightarrow P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) > 0 \quad \forall s_i, s'_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

$$\mathbf{2} \quad u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) \geq 0 \Rightarrow P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) \geq 0 \quad \forall s_i, s'_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

$$\mathbf{3} \quad u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) > 0 \Rightarrow P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) \geq 0 \quad \forall s_i, s'_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

$$\mathbf{4} \quad u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) \geq 0 \Rightarrow P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) > 0 \quad \forall s_i, s'_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Теорема 1

Если в конечной игре существует равновесие по Нэшу, то она принадлежит одному из четырех классов игр, приведенных выше.

Generalized ordinal potential game $\Delta u > 0 \Rightarrow \Delta P > 0$	Cyclic potential game $\Delta u \geq 0 \Rightarrow \Delta P \geq 0$
Strict potential game $\Delta u \geq 0 \Rightarrow \Delta P > 0$	Weak potential game $\Delta u > 0 \Rightarrow \Delta P \geq 0$

Таб. 1. Классы потенциальных игр

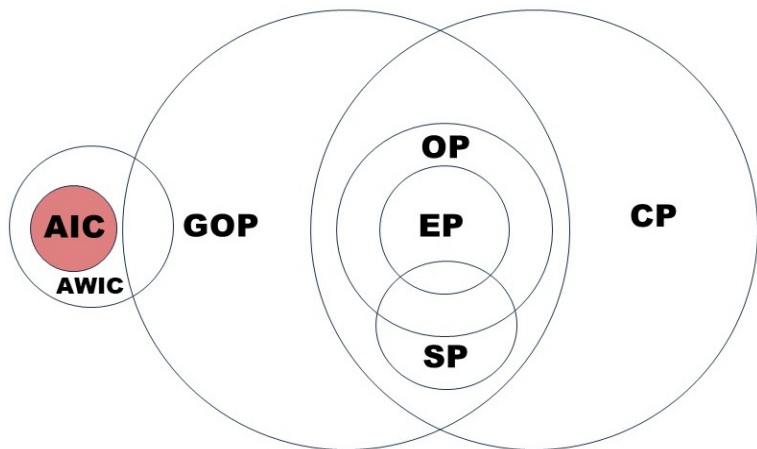


Рис. 1. Классификация конечных игр через потенциальные функции

EP – exact potential game; OP – ordinal potential game; GOP – generalized ordinal potential game; CP – cyclic potential game; SP – strict potential game; AWIC – absolute weak-improvement cycle game; AIC – absolute improvement cycle game.

Определения и обозначения

Рассмотрим игру в нормальной форме $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} \rangle$, где N конечное множество игроков; S_i это множество чистых стратегий i -го игрока; $u_i : \prod_{i \in N} S_i \rightarrow \mathbb{R}$ это функция выигрыша i -го игрока. Обозначим $S = \prod_{i \in N} S_i$.

Определение 1

Путь в S это последовательность $(s^1, s^2, \dots)$ элементов $s^k \in S$ таких, что $k = 1, 2, \dots$ профиль стратегий s^k и s^{k+1} отличаются только по одной, например, $i(k)$ -ой, координатой.

Определение 2

Путь $(s^1, s^2, \dots)$ называется *улучшающим путём* в игре Γ если для любых $k = 1, 2, \dots$ выполнено $u_{i(k)}(s^k) < u_{i(k)}(s^{k+1})$, где i игрок, отклоняющийся на шаге k .

Определение 3

Пусть $(s^1, s^2, \dots)$ это *слабо-улучшающий путь* в игре Γ если для любой $k = 1, 2, \dots$ мы имеем $u_{i(k)}(s^k) \leq u_{i(k)}(s^{k+1})$, где i игрок, отклоняющийся на шаге k , причем, на некотором шаге k найдутся шаги l, r , такие, что $l = r + 1$ и $u_{i(r)}(s^r) < u_{i(r)}(s^l)$.

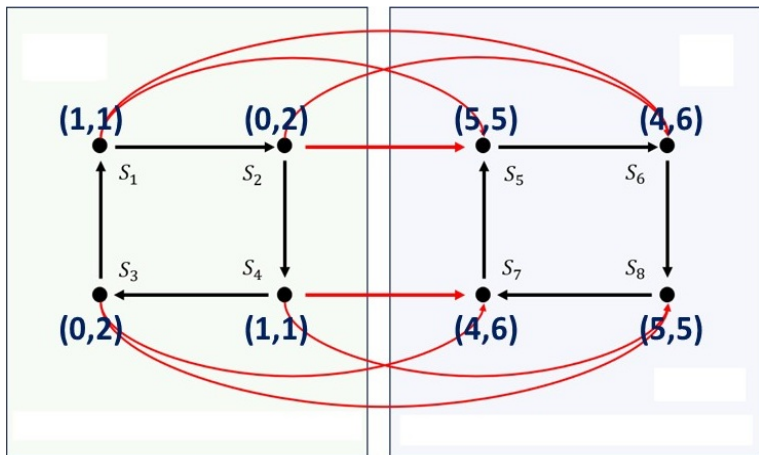


Рис. 1. Пути

Определение 4

Конечный путь $(s^1, \dots, s^m)$ называется *улучшающим циклом* если это улучшающий путь, $s^1 = s^m$.

Определение 5

Конечный путь $(s^1, \dots, s^m)$ называется *слабым улучшающим циклом* если это слабый улучшающий путь и $s^1 = s^m$.

Определение 6

Игра в нормальной форме $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} \rangle$ называется *generalized ordinal potential* если найдется функция $P : S \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $\forall i \in N$

$$u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) > 0 \Rightarrow P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) > 0 \quad \forall s_i, s'_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}. \quad (1)$$

В потенциальных играх (exact, ordinal, generalized ordinal) поиск равновесия Нэша сводится к задаче оптимизации потенциальной функции

Конечные потенциальные игры и их характеристика

- Exact potential game – теорема о 4 разностях (Monderer, Shapley, 1996).
- Ordinal potential game – отсутствуют слабые улучшающие циклы Voorneveld, Norde, 1996).
- Generalized ordinal potential game – нет улучшающих циклов (Monderer, Shapley, 1996).
- Best-response potential game – отсутствуют best-response циклы (Voorneveld, 2000).

Важный пример

Рассмотрим игру из статьи (Ui, 2000). Пусть $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} \rangle$ и задана квадратная матрица $(w_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Здесь $S_i = \{A, B\}$, $i = 1, 2, 3$. Функции выигрыша имеют вид

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \sum_{j: j=s_i} w_{ij}, \quad i \in N.$$

Для симметричных матриц игра является точной потенциальной с потенциальной функцией $P(s_i, s_{-i}) = \sum_i \sum_{j: j=s_i} w_{ij}$. Пусть, например, матрица весов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

То функция $P(s_i, s_{-i}) = \sum_i \sum_{j: j=s_i} w_{ij}$ не является exact potential. Данная функция имеет два строгих максимума в точках (A, A, A) и (B, B, B) и связана с функциями $u_i(s_i, s_{-i})$ следующим соотношением $\forall i \in N$

$$P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) > 0 \Rightarrow u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) > 0 \quad \forall s_i, s'_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Обратная импликация неверна. Таким образом, функция P обладает свойством, схожим с определением generalized ordinal potential function, но с обратной импликацией.

Определение 7

Игра в нормальной форме $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} \rangle$ называется циклической потенциальной игрой, если существует непостоянная функция $P : S \rightarrow \mathbb{R}$, где $S = \prod_{i \in N} S_i$, такая что $\forall i \in N$

$$u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) \geq 0 \Rightarrow P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) \geq 0 \quad \forall s_i, s'_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}. \quad (2)$$

Соответствующая функция P называется циклической потенциальной функцией.

Замечание

Это эквивалентно

$$P(s_i, s_{-i}) - P(s'_i, s_{-i}) > 0 \Rightarrow u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) > 0 \quad \forall s_i, s'_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Если мы откажемся от условия непостоянства циклических потенциальных функций, то любая игра в нормальной форме допускает функцию P , удовлетворяющую свойству (2).

Утверждение 1

Пусть для циклической потенциальной игры циклическая потенциальная функция $P : S \rightarrow \mathbb{R}$, достигает строгого максмума в точке $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$. Тогда в данной игре s^* это строгое равновесие по Нэшу.

Утверждение 2

Пусть в циклической потенциальной игре существует циклическая потенциальная функция P , значения которой различны, т.е. $P(s) \neq P(s') \forall s, s' \in S, s \neq s'$. тогда в этой игре существует строгое равновесие по Нэшу.

Пример 1

Рассмотрим биматричную игру

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (0, 2) & (2, 4) \\ (0, 2) & (1, 1) & (1, 3) \end{pmatrix},$$

в которой у первого игрока это стратегии x_1, x_2 , а у второго игрока y_1, y_2, y_3 . В этой игре профиль (x_1, y_3) является равновесием по Нэшу, которое может быть проверено по определению. В этой игре есть улучшающий цикл

$$((x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_2, y_1), (x_1, y_1)).$$

Очевидно, что в связи с наличием улучшающего цикла, игра не является generalized ordinal potential function. С другой стороны, эта игра является циклической потенциальной игрой с циклической потенциальной функцией

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Определение 8

Два непересекающихся непустых множества профилей стратегий $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset S$ в конечной игре Γ называются связанными, если существуют $s \in \Lambda_1, s' \in \Lambda_2$, содержащиеся в некотором слабо-улучшающем цикле игры Γ . Если для всех $s' \in \Lambda_2$ не существует слабого улучшающего пути от $s' \in \Lambda_2$ до некоторого $s \in \Lambda_1$, то мы говорим, что набор профилей стратегии Λ_2 не связан с Λ_1 .

Определение 9

Абсолютный слабый улучшающий цикл в игре Γ - это слабый улучшающий цикл, который содержит все профили стратегий из стратегического пространства S .

Теорема 2

Для конечной игры Γ в нормальной форме следующие утверждения равносильны:

- 1 Γ – циклическая потенциальная игра ;
- 2 существуют два непересекающихся множества $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset S$, где Λ_2 несвязано Λ_1 ;
- 3 В игре отсутствуют слабые улучшающие циклы.

Следствие 1

Если конечная игра Γ имеет строгое равновесие по Нэшу, то эта игра является циклической потенциальной игрой.

Определение 10

Профиль стратегий (s'_i, s'_{-i}) называется строго неустойчивым если $\forall i \in N$

$$u_i(s'_i, s'_{-i}) - u_i(s_i, s'_{-i}) < 0 \quad \forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Следствие 2

Если в конечной игре Γ имеется строго неустойчивый профиль стратегий, то игра является циклической потенциальной игрой.

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION!