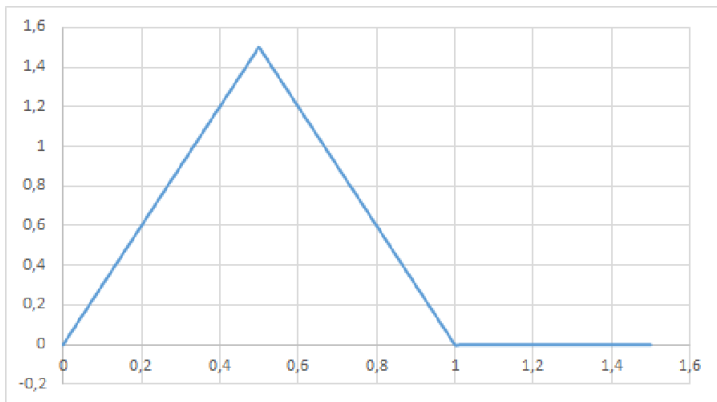


О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ АВТОНОМНЫХ И НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ветохин Александр Николаевич

Множество Кантора

$$x_{n+1} = t(x_n), \quad t(x) = \begin{cases} 3x, & \text{при } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -3(x - 1), & \text{при } \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ 0, & \text{при } 1 \leq x \leq \frac{3}{2}; \end{cases}$$



Множество Кантора

Представим число x на отрезке $[0, 1]$ в виде троичной дроби $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \alpha_i \in \{0, 1, 2\}$. Если число x троично-рациональное число, то

$$\begin{aligned} x &= 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m 0 \dots = \\ &= 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha'_m 2 \dots, \quad \alpha_m \neq 0, \alpha'_m = \alpha_m - 1 \end{aligned}$$

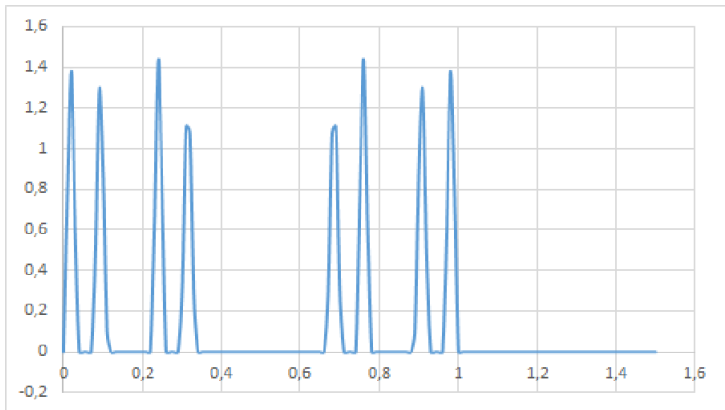
будем использовать первое представление, если $\alpha_m = 2$, и второе, если $\alpha_m = 1$. Тогда

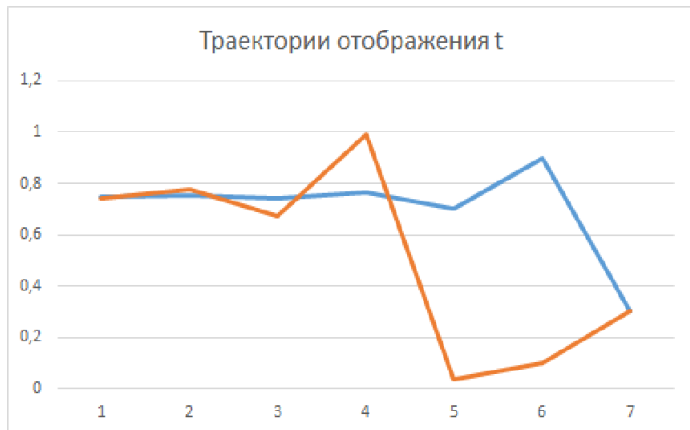
$$t(x) = \begin{cases} 0, \alpha_2 \alpha_3 \dots, & \text{если } \alpha_1 = 0; \\ \geq 1, & \text{если } \alpha_1 = 1; \\ 0, 2 - \alpha_2 2 - \alpha_3 \dots, & \text{если } \alpha_1 = 2. \end{cases}$$

Если $\mathcal{K}$ — множество Кантора, то выполнено равенство $t(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$.

Множество Кантора

График третьей итерации отображения t





Пусть X — компактное метрическое пространство с метрикой d , $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i < n} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где f^i , $i \in \mathbb{N}$ — i -я итерация отображения f , $f^0 \equiv \text{id}_X$.

Топологическая энтропия

Обозначим через $N_d(f, \varepsilon, n)$ — максимальное число точек в пространстве X , попарные d_n^f -расстояния между которыми больше, чем ε .

Определение [R. L. Adler, A. G. Konheim and M. H. McAndrew, 1965 г.]

Топологической энтропией отображения f называется величина

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n).$$

Обозначим через $S_d(f, \varepsilon, n)$ — минимальное количество шаров $\{y \in X : \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon\}$ объединение, которых содержит X . Тогда топологическую энтропию можно вычислить по формуле

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

Рассмотрим Ω_2 множество последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, где $x_i \in \{0, 2\}$, с метрикой

$$d_{\Omega_2}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ \frac{1}{\min\{i: x_i \neq y_i\}}, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

Это пространство гомеоморфно множеству Кантора. Величина $N(t, \varepsilon, n)$ ведет себя как $\text{const}_\varepsilon \cdot 2^n$, при $n \rightarrow +\infty$, поэтому топологическая энтропия отображения t равна $\ln 2$.

Обозначим $C(X, X)$ пространство непрерывных функций из X в X с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Рассмотрим функцию $f \mapsto h_{\text{top}}(f)$.

Определение 2

Функциями *0-го класса Бэра* на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции, и для всякого натурального p функциями *p-го класса Бэра* называются поточечные пределы последовательностей функций $(p - 1)$ -го класса Бэра.

Пример: функция Дирихле.

$$D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(m! \pi x))^{2n} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 1, & \text{при } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Из формулы следует, что функция D принадлежит 2-му классу Бэра, но она всюду разрывна, а следовательно, не принадлежит 1-му классу Бэра.

Теорема 1

Функция $h_{\text{top}} : C(X, X) \rightarrow [0; +\infty]$ принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $C(X, X)$, а ее множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным множеством типа G_δ .

Теорема 2

Если $X = \mathcal{K}$, то функция $h_{\text{top}} : C(X, X) \rightarrow [0; +\infty]$ всюду разрывна на подпространстве функций, удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой $L > 1$, и не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве $C(X, X)$.

Misiurewicz M. (1979) установил, что функция $h_{\text{top}} : C([0, 1], [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ является всюду полунепрерывной снизу, а следовательно принадлежит первому классу Бэра.

Обозначим $\text{Hom}(X, X)$ пространство гомеоморфизмов из X на X с метрикой из $C(X, X)$.

Теорема 3

Если $X = \mathcal{K}$, то функция $h_{\text{top}} : \text{Hom}(X, X) \rightarrow [0; +\infty]$ всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу.

Если $X = [0, 1]$, то функция $h_{\text{top}} : \text{Hom}(X, X) \rightarrow [0; +\infty]$ всюду равна 0.

Обозначим через $E_h(f)$ множество предельно реализуемых значений топологической энтропии, т.е. тех, которые получаются при сколь угодно малых равномерных возмущениях отображения f :

$$E_h(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{h_{\text{top}}(g) : \rho(f, g) < \frac{1}{n}\}$$

Теорема 4

Если $X = \mathcal{K}$, то для каждого непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ выполнено равенство $E_h(f) = [0; +\infty]$.

Теорема 5

Для функции $h_{\text{top}} : C(\mathcal{K}, \mathcal{K}) \rightarrow [0; +\infty]$ верно

- 1 множество точек непрерывности пусто;
- 2 множество точек полунепрерывности снизу совпадает с множеством точек, где выполнено равенство $h_{\text{top}}(f) = 0$ и является всюду плотным множеством типа G_δ ;
- 3 множество точек полунепрерывности сверху совпадает с множеством точек, где выполнено равенство $h_{\text{top}}(f) = +\infty$.

По последовательности непрерывных по совокупности переменных отображений $f_\infty \equiv (f_1, f_2, \dots)$, образуем дополнительную систему метрик на X

$$d_n^{f_\infty}(x, y) = \max_{0 \leq i < n} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)),$$

$$(f^{\circ i} \equiv f_i \circ \dots \circ f_1 \circ \text{id}_X), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Неавтономный случай

Обозначим $C_\infty(X, X)$ ($\text{Hom}_\infty(X, X)$) пространство последовательностей непрерывных функций (гомеоморфизмов) из X в X с метрикой

$$\rho_\infty(f_\infty, g_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho(f_k, g_k)}{1 + \rho(f_k, g_k)}.$$

Теорема 6

Функция $h_{\text{top}} : C_\infty(X, X) \rightarrow [0; +\infty]$ принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $C_\infty(X, X)$.

Теорема 7

Если $X = \mathcal{K}$, то функция $h_{\text{top}} : \text{Hom}_\infty(\mathcal{K}, \mathcal{K}) \rightarrow [0; +\infty]$ всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\text{Hom}_\infty(\mathcal{K}, \mathcal{K})$.

Теорема 8

Если $X = [0, 1]$, то функция $h_{\text{top}} : C_{\infty}(X, X) \rightarrow [0; +\infty]$ всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $C_{\infty}(X, X)$.

1. Ветохин А. Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 448–453.
2. Ветохин А. Н. Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 5. 64–67.
3. Ветохин А. Н. О топологической энтропии одного семейства гомеоморфизма множества Кантора // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2025. № 4. С. 69–72.
4. Ветохин А. Н. Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 3. С. 69–72.

5. Ветохин А. Н. Множество предельно реализуемых значений топологической энтропии непрерывных отображений множества Кантора // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2023. № 3. С. 35–40.
6. Ветохин А. Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. 2019. 106. № 3. С. 341–348.
7. Ветохин А. Н. Точный бэровский класс асимптотической топологической энтропии семейства неавтономных динамических систем // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2023. Т. 33. С. 41–53.

8. Ветохин А. Н. О не принадлежности второму бэровскому классу топологической энтропии одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 1. С. 133–136.

Спасибо за внимание!